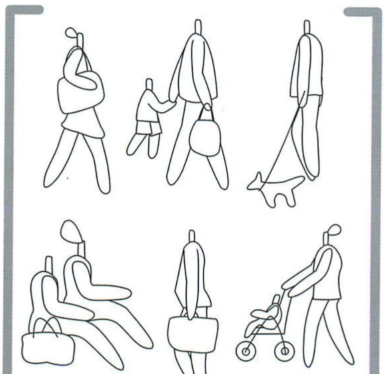
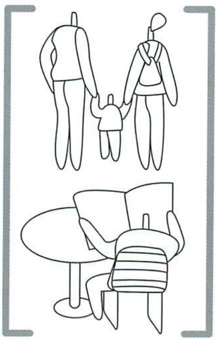
# 線型代数
# Linear Algebra



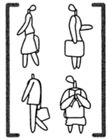


長谷川浩司
*Koji Hasegawa*

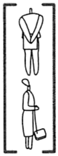
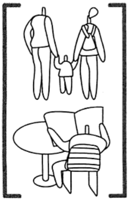




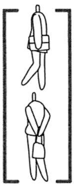
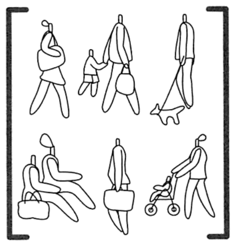
日本評論社

# 線型代数
## Linear Algebra

長谷川浩司
*Koji Hasegawa*


# はじめに

数学はやさしくはない．しかし，きびしさの中に知的なよろこびがあるのが数学である．大学の理工系で通常必修とされる線型代数を学ぶにあたり，本書でそのようなよろこびを感じていただければと思う．ぜひ紙と鉛筆を片手に読んでいただきたい．

本書は雑誌『数学セミナー』に 2001 年 4 月号から 19 回にわたり連載された原稿に加筆したものである．読者としては，おもに大学 1, 2 年生を想定する．雑誌連載という性格から，高校生が進んだ数学を垣間見るため，また大学入学数年後の復習と展望のためとしても考えうるかと思う．

内容は東北大学の理系 1〜2 年生向け講義に基いており，1990 年代後半に半年で設定された工学部向け講義用のプリントが原形である．当時平面の 1 次変換の知識は仮定できなかったためもあるが，2 次元を詳しくやった後に高次元，そして抽象ベクトル空間へと移行することは理解を助けると思い，そのような 3 部構成となっている．やや冗長ではあっても，理解を形作るという意味において，読んだところまでは着実に「役に立つ」ことを願っている．

0 章「ことはじめ」では，線型代数のいわば背後にある広大な風景を，予備知識が不要な範囲でざっと眺めている．線型代数が現実に使用される場面は幅広く網羅は難しいが，第 1 部「入門編：2 次行列と平面の 1 次変換」あるいは第 2 部「基本編：線型写像・次元・行列式」を読めば最小限度の知識は得られるだろう．指導要領の度重なる改訂に対しても，はじめの数章を取捨選択して扱うことで対応できるのではないかと思う．第 3 部「展開編：一般のベクトル空間——さまざまな数学への扉」では，より進んだ数学的考え方の一端に触れることも意識し，最終章では(解析学的に微妙な点については，あえておおらかに考え)量子力学への入門も試みた．教科書としての使用については，目次の後ろの流れ図も参考とされたい．そのほか：

●いわゆる学習参考書のようなスタイルから出発しつつ，次第に数学の標準的書き方に近付くよう心がけた．また思考過程がわかる説明に努め，たとえばベクトル積(7章)なども天下りの定義を避けている．図も多く用いた．

●各章末に「道案内」と称して，その章に関する註釈あるいは参考書(further reading にあたる情報)を挙げた．連載時は脚注になっていたものが主である．巻末にも参考書を挙げた．

●各節に理解を確認するための「問」を設けた．また各章末には練習問題をあげた．これらの略解は巻末にまとめてある．

●高校までの教科書と異なり，「例題」は設けていないかわり，「例」が各所にある．これは実質的に例題のこともあれば，また理解を助けるための実例のこともある．

原稿の準備にあたっては，当時学生だった相馬清吾君，水野正博君のノートをコピーさせていただいた．また武部尚志，黒木玄，伊達悦朗，堀田良之ほかの方々に細部について相談させていただき，また文献を御教示いただいた．金順徳さんをはじめ歴代の teaching assistant の方々には，直接本書と関係ない部分を含め，講義や練習問題などについて意見を聞くことができた．連載では大石容子さんにイラストをお願いしたが，誌面が次第に厳しくなりその余裕を失なったことは残念だった．連載中から本になるまでの間に，東京工業大学(材料工学専攻)の安田公一先生は原稿を数次にわたり通読され，貴重な御意見を下さった．そして大賀雅美さんをはじめとする編集部の方々には，本になるまでに多大な協力をいただいた．これらの方々に心より感謝したい．

20世紀の知的営みを継承発展させることは，21世紀の社会の大きな課題であろう．ささやかながら，本書がその一助となれば幸いである．本書を出版直前に他界した父・剛三に捧げる．

2004年2月　仙台にて　著者

## ●——この本の読み方

第1部は高校の復習〜大学の予習といった内容である．平面の1次変換に慣れている場合は適宜とばして，5章ないし6章から読んでもよい．前期「行列と行列式」，後期「線形写像と行列の対角化」などのシラバスの場合は(目次のあとの流れ図参照)

**前期**　(1章—2章—7章—)6章—8章—11章—12章

**後期**　(6章—)9章—10章—13章—(14章)—15章

と使えるよう配慮した．その場合§12.1は前期に1次独立性について適宜解説しつつ触れるか，または復習をかねて後期に述べることとなろう．

目次および練習問題には，星印(*)で難所を示している．はじめは飛ばして必要に応じて戻ることもできるであろう．巻末の索引は，復習時，あるいは背伸びして先読みしたいときなどにも活用されたい．

## ●——凡例

●本書は序章，3部19章の本編，付録と問題略解，索引からなる．各章の節は§1.1(1章1節)，§1.2(1章2節)，…のように引用する．

●原則として各節に問が，また章末に5問前後の問題がある．略解は巻末にある．問は§の番号で，練習問題は1-1，1-2などで示す．

●定義とはあたらしい言葉の意味を明文化したものである．補題とは，おもに定理を示すための予備的命題をいう．系(けい)とは定理から直接従う命題をいう．

●記号 □ を議論(証明や例など)の終了を明らかにするために用いる．

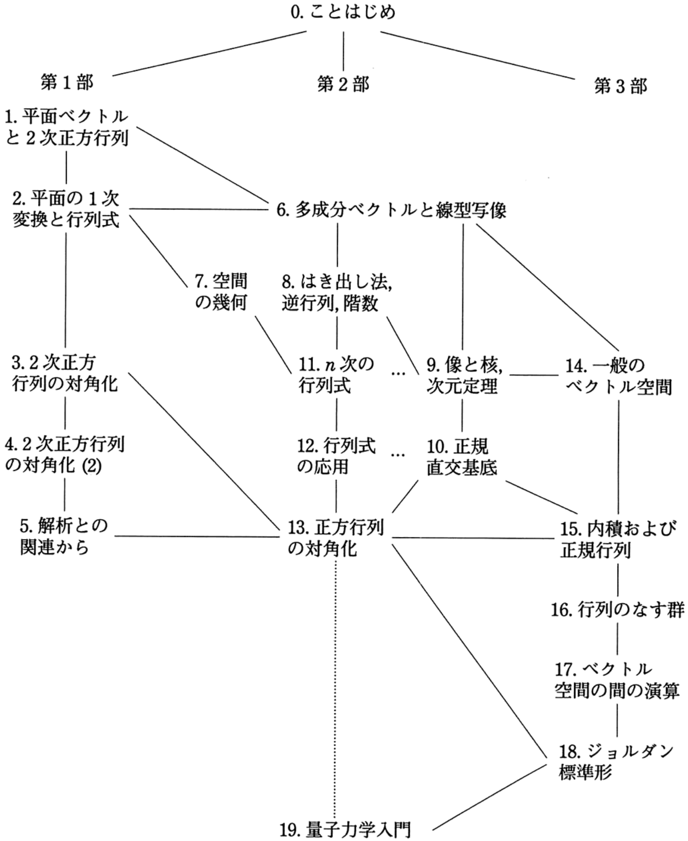
$:=$ は「左辺を右辺で定義する」を意味する．

$A \Rightarrow B$ は「$A$ ならば $B$」，$A \Leftarrow B$ は「$B$ ならば $A$」，$A \Leftrightarrow B$ は「$A$ ならば $B$ かつ $B$ ならば $A$」，すなわち「$A$ と $B$ は同値」を意味する．

$\therefore$ は「ゆえに」，$\because$ は「なぜならば」を意味する．また $\forall x$ は「すべての $x$ に対して」，$\exists x$ は「ある $x$ に対して」の意味で用いられる．

●集合と写像の記法については，§1.6を参照されたい．なお部分集合の記号について，$X \subset Y$ と書いても $X = Y$ であることを排除しないのが通例である．この点は不等号の用法と異なるので注意する．

# 目　次——iv


0. ことはじめ
第1部
第2部
第3部
1. 平面ベクトルと2次正方行列
2. 平面の1次変換と行列式
6. 多成分ベクトルと線型写像
7. 空間の幾何
8. はき出し法, 逆行列, 階数
3. 2次正方行列の対角化
11. n 次の行列式
9. 像と核, 次元定理
14. 一般のベクトル空間
4. 2次正方行列の対角化 (2)
12. 行列式の応用
10. 正規直交基底
5. 解析との関連から
13. 正方行列の対角化
15. 内積および正規行列
16. 行列のなす群
17. ベクトル空間の間の演算
18. ジョルダン標準形
19. 量子力学入門

# 線型代数
Linear Algebra

# 0章：ことはじめ

大学に入ってすぐ，とくに理系でやる(はずの)数学がふたつある．微積分，そしてこの本の内容である線型代数だ．線型代数とはイカメシイ名前だが，ベクトルや行列の延長線上のものである．そのものズバリ，「ベクトルと行列」「行列と行列式」などの題でも多くの教科書・参考書があって，選ぶのに迷うほどだ．高校でもやったのに，なぜ？　というわけで，ここで「前口上」を述べる．本格的勉強の前に，いろんな数学を覗き見あるいは展望するのも悪くないだろう．

## 0.1　連立1次方程式

線型代数とは，ひとことで言えば1次式のあつかい方についての数学である．実際，英語では線型も1次もリニア linear である．(「線型」とは，「1次」の「タイプ」と思えばいいだろう．なお「線形」とも書くが，こちらは「線」という「カタチ」ということになる．気にしない！)

したがって「線型代数」のモトは，1次方程式

$$ax = y$$

までさかのぼることができる．左辺は $x$ の1次式で，$a \neq 0$ なら

$$x = \frac{y}{a}$$

と，$x$ について解ける．

もっともこの古さは，わり算の歴史，あるいは数の歴史というべきかもしれない．線型代数らしさが出てくるのは，連立の1次方程式からである．これも古くて，古代メソポタミアですでに現れているという[1)]．

高校で学んだように，連立1次方程式を行列を使ってまとめて表すことができる．$x_1$ と $x_2$ の連立1次方程式

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ cx_1 + dx_2 = y_2 \end{cases} \qquad (1)$$

は，行列とベクトルを使って，

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

と書けるのであった[2)]．

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad \vec{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

と書けば，

$$A\vec{x}=\vec{y}$$

である．これは小学校以来の比例の式 $ax=y$ の $x, y$ をベクトルに，係数 $a$ を行列にしたものと見ることができる．$ax=y$ $(a\neq 0)$ が $x=\dfrac{y}{a}$ と解けるように，この解は行列 $A$ に逆行列があれば

$$\vec{x}=A^{-1}\vec{y}$$

と書けるのであった．

複雑なデータ全体をひとつの数のようにまとめて扱えるという意味で，行列は数の世界をひろげるものと言えるだろう．

比例のときと同様に，ベクトルの行列倍については

$$A(\vec{x}+\vec{x}')=A\vec{x}+A\vec{x}' \tag{3}$$

が成り立つ．また，あたりまえだが，数 $k$ に対して

$$A(k\vec{x})=kA\vec{x} \tag{4}$$

も成り立っている．じつはちょっと考えると，1次式(1)で表される，というかわりに性質(3)と(4)をもつ，と言っても同じであることがわかる(§1.4)．そこで，具体的な式(1)をはなれて，この性質を**線型性**とよぶ．あとで触れるように，この性質は連立1次方程式以外でも顔を出し，行列の世界のことが行列にとどまらない一般性をもつのである．

## 0.2　多変数の微積分

多変数の関数は，高校では表立っては扱わなかった．この点で大学の解析——微積分の講義——では，学ぶべきことがたくさんある．最も簡単な関数は多変数でもやはり1次式なので，線型代数は解析とも無縁でない．そして，じつは2次式までは線型代数のうちである．実際，

$$ax^2+bxy+cy^2=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & \dfrac{b}{2} \\ \dfrac{b}{2} & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{5}$$

と書ける．左辺は $x$ と $y$ の2次式だが，これがベクトルと行列の自然な演算で書けるわけだ．(左辺には3つの項のどれにも $x$ と $y$ があわせて2個ずつあり，0次と1次の項がない．そこでこれは斉次2次式とよばれる．斉次とは次数がそろっているという意味である．)

さて1変数関数の場合，微分により関数 $f(x)$ のグラフの接線を求めると，その点($x=a$ としよう)の近くでは

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)$$

と関数の値を近似することができる．右辺が $x=a$ における接線の式で，$x$ の1次式である．1次式は単純だけど，さらに2次式，3次式…を用いて近似を考えるのは，自然な発想であろう．これは1変数のときに限らず使える基本的な考え方で，**テーラー展開**とよばれる方法である．2変数関数 $f(x, y)$ について関数のグラフ $z=f(x, y)$ は空間の曲面となるが，その接平面を求めることで関数 $f$ の $x$ と $y$ の1次式による近似が考えられ，以下2次式，3次式，… による近似も考えられる．

そこで2次式を(5)のように行列を使って書くことに戻ろう．この表示は2次式 $z=ax^2+bxy+cy^2$ で表される図形を($z$ 軸を中心として)回転したり，また元に戻したりという操作と実に相性がよい．これは $xy$ 平面の回転が行列を使って書けることによる．この相性の良さが，多変数関数の極大や極小を調べるときの基本にもなる．2変数(以上の)関数についても極値が考えられるけれど，そのとき極値になるかどうかを調べる点の「まわり」が，2変数以上では方向がたくさんある．1変数では左右に「増えるか，減るか」を見れば済んだが，ぐるりと360度見なくてはならない．これは大きな違いであり，極値の候補になる点での関数の様子を調べるのに，座標を回転などで適切に変換して考えることになる．こうして行列が微積分に関わってくる．

平面の場合に限って，回転は複素数のかけ算を使っても表すことができるが，この方法には空間では使えないなどの基本的な不自由さがある．平面の回転や2変数の2次式の扱いは，第一部の大きな目標の1つである．

## 0.3 1次変換と身近な非可換

実数を含み，$ab=ba$ (交換可能性，略して可換性という)が成り立つ数

の体系(加減乗除がその中でできる)は，複素数以外にない．これは 19 世紀の定理だが，こうとは限らない，$ab \neq ba$ という「非可換な」数を探す試みもそのころ行なわれた[3)]．このようなものを数と呼んでよいかは思案のしどころだが，こうよぶことにしたとすれば，数と行列の差はわずかである．行列の世界では，2 つの正方行列 $A, B$ がともに $O$(ゼロだけからなるゼロ行列)でないのに $AB = O$ となることがある(これにより，$AB = AB'$，$A \neq O$ でも $B = B'$ が結論できない)．「ゼロ以外では割れる」数の世界と比べるとき，これだけが行列の世界のおもな違いである．

残念ながら数とはよびにくく，積も一般には可換でない行列だが，その一方で行列で表すべき対象は(連立方程式や，2 次式を表すのに便利なだけでなく)たくさんある．たとえば，我々が住む 3 次元空間における回転もそうである．これについて少し考えてみよう．

回転とは，ある 1 点(たとえば原点)を中心として，平面ないし空間を素朴に回す操作である．回転により，ひとつの図形はこれと合同な図形に移される．たとえば原点を O，原点以外の 2 点を P, Q とし，これらが回転により移された点をダッシュをつけて表そう．原点が中心のときを考えるので，$\mathrm{O}' = \mathrm{O}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ としよう．ベクトルの和の規則により，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を 2 辺とする平行四辺形の対角線である．この平行四辺形も，回転によって合同な図形に移される．ということは，できた図形はやはり平行四辺形のはずで，これは $\overrightarrow{\mathrm{OP}}' + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}'$ が $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を回してできる対角線のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OR}}'$ に等しいことを意味している(p 22，図 4)．これはさきほど線型性と呼んだうちのひとつ，(3)にほかならない．(4)も明らかなので，回転という操作は線型性をもつ，したがって回転は行列で書ける！　ということになる．

このように，(3)と(4)をみたし，したがってベクトルの行列倍で表されるような平面(空間)をそれ自身にうつす操作のことを，一般に**1 次変換**(あるいは**線型変換**，**線型写像**)という．

さて，平面の回転は，原点を中心に何度まわすかできまる．2 つの回転をつづけて行なった結果は，それぞれの回転角の和だけの回転となって，順番によらない．これは，直感的に明らかであろう．

では，空間の回転の場合を考えよう．このときも回転が行列で表される

ことは，平面のときと同じである．しかし，その実体はより複雑である．地球儀をまわすときを想像するとわかるように，空間の回転は必ず回転軸をもち，そのまわりに何度回すかできまる．だが回転軸はいろいろで，平面のときより格段に複雑である．そして回転軸が同じでないかぎり，2つの回転は可換でないのが普通である．

たとえば，図のように石板が平面上に立っていたとしよう．これを

（A） 横方向を軸に90度向こうに回す(倒す)

（B） 平面上でこれと直交する方向を軸に90度回す

の順で動かした結果は，逆順のときの結果とたしかに異なっている．

行列では，$AB = BA$ が成り立つとは限らない――と，行列の計算を習うとすぐに注意されるけれども，$AB \neq BA$ は空間の回転という身近なところにすでにあるわけだ．さらに，行列の世界は非可換な世界のほとんどすべてを含むといっても，そう的外れではない．行列の扱いを学ぶことは，数の世界をはなれて非可換な世界の本質に触れることになっている．

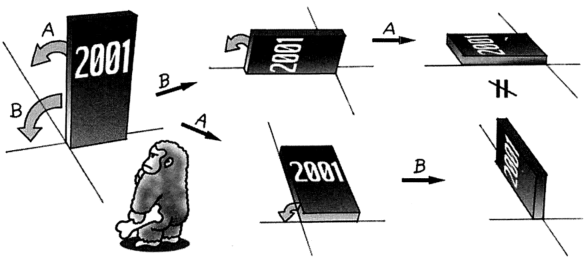



図　石板(映画『2001年宇宙の旅』の主役)を倒す

## 0.4　次元

ところで，平面を2次元，空間を3次元などと言うことがある．これは平面の点を指定するのに2個の変数(実数)が，また空間のときは3個が，それぞれ必要なことを意味している．

我々が日常生活で親しみのある平面や空間については，次元の意味づけ(定義)はこれで十分と言えるかもしれない．一方，2変数，3変数以上のたくさんの変数をあつかう必要はいくらでもある．そのために，次元という

概念を(改めて)考え直すのも線型代数の役割である．これは我々の視覚的直観を，直観のきかない範囲にまで拡張することと考えられる．

そして次元という言葉は，幾何学をはなれたところでも活躍する．たとえば次のように．

## 0.5 常微分方程式

1変数の関数 $f(x)$ とその微分 $f'(x)=\dfrac{df}{dx}$，$f''(x)=\dfrac{df'}{dx}$，… についての関係式を，**常微分方程式**という(「常」は ordinary(フツウ)の訳で，微分方程式について「1変数の」という意味で使われる)．簡単のため $b, c$ を数とし，次の常微分方程式を考えよう．

$$f''(x)+bf'(x)+cf(x)=0 \tag{6}$$

この方程式は，未知関数 $f$ について1次である——といっても $f$ の微分も入っているが，(6)の左辺を $Lf$ と書けば，$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ のとき

$$L(f_1+f_2)=(f_1+f_2)''+b(f_1+f_2)'+c(f_1+f_2)=Lf_1+Lf_2 \tag{7}$$

が成り立っている．同様に，$k$ が定数のとき

$$L(kf)=k(Lf) \tag{8}$$

である．(7), (8)は行列のとき線型性とよんだ性質(3), (4)と同様の性質なので，この方程式(6)は線型常微分方程式とよばれる．これより $Lf_1=0$, $Lf_2=0$ で $k_1, k_2$ が数なら

$$L(k_1f_1+k_2f_2)=L(k_1f_1)+L(k_2f_2)=k_1Lf_1+k_2Lf_2=0$$

である．解の和 $k_1f_1+k_2f_2$ がまた解になるこの性質は，物理では「重ねあわせの原理」ともよばれるが，方程式が未知関数について1次(線型)であることの結果である．

このような，つまり線型な常微分方程式の解の全体は，タテベクトルやヨコベクトルをはなれて，線型代数の言葉が意味をもつ舞台の一つである．解の全体が有限次元ベクトルの空間((6)の場合は2次元)と思えるようになることが，まずは基本的である．少し説明しよう．

(6)は，次のように行列とベクトルを使って同値な書きかえができる．

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{bmatrix} \tag{9}$$

(左辺のベクトルの微分は，成分ごとに微分する.)　ここでいきなりだが，

数 $a$ の指数関数 $e^a$ が大事だったように，正方行列 $A$ の指数関数 $e^A$ が考えられ，$A$ と同じサイズの行列となる．くわしくは5章で述べるが，数の指数関数のときとまったく同じに，行列の指数関数には次の性質がある．

$$\frac{d}{dx}e^{xA} = Ae^{xA} \tag{10}$$

行列 $A$ の $x$ 倍をいつもどおり $xA$ と書いたが，これを $Ax$ と書けばまったく見なれた式である．これを使うと，(9)の解 $f$ は

$$\begin{bmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{bmatrix} = e^{xA}\begin{bmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{bmatrix} \quad \left(A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{bmatrix}\right)$$

と与えられてしまい，初期値 $f(0), f'(0)$ をならべたベクトルで決定されることがわかる．行列の指数関数というものの理解が(6)のような方程式を理解することと直結しており，本書でもくり返し扱うことになる．

## 0.6　シュレディンガー方程式

さて，物理の発展は数学にも大きな刺激を与えてきた．すでに前世紀となった20世紀には，物理学が大きな発展を遂げ，物質の成り立ちについても深い認識が得られた．極微の世界では自然はわれわれの日常の経験からは予測し難い本性を示し，その集積によって日常の世界ができている．その極微の世界を記述する法則が量子力学として定式化された．その際基本的なのは，物質は波動関数とよばれる「見い出される確率」を表す関数で記述され，その時間変化が微分方程式で表されることである．物理法則を表すこの方程式はシュレディンガー方程式とよばれる((11)式)．

簡単のため，空間自由度(次元)が1の場合を考える．古典力学的には直線の上を粒子(質点)が動く，たとえばバネにつけられたおもりの運動がそうである．雑な説明をすると，量子力学的な粒子は，いわばぼやけて存在するという．そして観測の結果どこにどれだけの確率で見い出されるかを表すのが，波動関数とよばれる2変数の関数 $\psi$(プサイ)$(x, t)$ である．時間 $t$，および空間の座標を表す実数 $x$ に対し，$\psi(x, t)$ は複素数をとるが，比

$$\int_a^b |\psi(x, t)|^2 dx \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx$$

がこの粒子が時刻 $t$ に区間 $[a, b]$ で見つかる割合を表す．波動関数

$\psi(x,t)$ の時間変化を知るのが問題である．粒子の質量を $m$ としよう．波動関数は次の形の微分方程式をみたす，というのが量子力学における運動の方程式である．

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi(x,t)+u(x)\psi(x,t) \tag{11}$$

ここで $i$ は虚数単位($i^2=-1$)．また，d のような丸い字 $\partial$（ラウンドd）は，2 変数以上の関数の微分係数を表すときに使う記号で，$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi$（これを $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi$ とも書く）は，$t$ を定数と考え $x$ で 2 回微分することを表す．$\hbar$（エイチ・バー）はプランク定数といわれる物理定数，また関数 $u$ はポテンシャルとよばれ，古典力学のときの外力(に関するポテンシャルエネルギー)に相当する．

わかりやすいように，以後(適当な変数変換により) $\hbar=1$，$m=1$ としよう．安定した状態として，(11)の右辺がもとの $\psi$ の実数倍である場合が大事である．このときの方程式

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\right)^2\psi+u(x)\psi=\lambda\psi \qquad (\lambda\text{（ラムダ）は実数}) \tag{12}$$

を定常的シュレディンガー方程式とよぶ．このときは時間に関して

$$\psi(x,t)=e^{it\lambda}\psi(x,0)$$

となり，$\lambda$ が実数であることとあわせ，存在確率を表す $|\psi(x,t)|^2$ が時間によらないからである(実数 $\theta(=t\lambda)$ に対し $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ であり，その絶対値の 2 乗は $|e^{i\theta}|^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ である —— §5.5)．じつは $\lambda$ はこの状態 $\psi$ のエネルギーを表している．

(12)の右辺は，さっきと同じ意味で未知関数 $\psi$ の 1 次式である：$-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\right)^2\psi+u(x)\psi=L\psi$ と書けば，(7)と同じ

$$L(\psi_1+\psi_2)=L\psi_1+L\psi_2$$

が成り立っている．(8)も明らか．したがって「重ねあわせの原理」により，量子力学では**状態のたし算ができる**ことになる．

定常的な場合の方程式(12)を，あらためて

$$L\psi=\lambda\psi \tag{13}$$

と書き，$L$ を行列，$\psi$ をベクトルのように見よう．すると，$\psi$ は $L$ をかけても方向が変わらない，という言い方ができる．$L$ が行列の場合，このような方向を探す問題を固有値問題，その方向のベクトルを固有ベクトルと

よぶが，まったく同じ用語が量子力学でも用いられる．こうして行列に対する経験と感覚が量子力学の場面でも活かされる．行列で経験した非可換性も，物理量の間の不確定性原理に直結する．また上のような1次元(1自由度)の場合，シュレディンガー作用素 $L$ の固有値問題(13)は，しかるべき $u$ (力！)を考えるごとに直交多項式あるいは特殊関数と呼ばれる一群の大事な関数を定め，それらを調べることが物理としても大事な問題となる．少なくともこの課題の重要な一部は，まったく線型代数であると言ってよい．

ちなみに $u$ が一般のとき，$L$ の固有値問題にワイル-ストーン-小平-ティッチュマーシュの公式と呼ばれる形で解を与えたのは，小平邦彦(1915-1997)の若き日の仕事であった．これには微分作用素 $L$ の分数関数というべき，$\dfrac{1}{\lambda-L}$ の考察が基本となる[4]．

## 0.7 考える道具として

20世紀に進歩したのは数学も同様である．個別な問題から離れるとき，時代を象徴する精神の1つとして「内在化」とでもよぶべきことがあげられる．そのめざすところは，座標のとりかたとか記述の方法などによらないよう，いかに本質をとりだすかというようなことである．

これは，計算だけでは結論が得られないがどうするか，とか，人によって異なる記号を使っているのを整理してちゃんとした証明を与えたい(そして，そもそもどうすればちゃんとしたことになるか？ という重い問いかけ)，などの課題に迫られて起ってきたことで，さまざまな数学的対象が根底から見直された．そしてこれを契機に単なる記号法や計算の巧みさによるのでない，意味を考えての推論を深く行なえるような基礎が与えられたといってよいだろう．(とはいえ，記号も計算もやはり大事である．)

たとえば，考えている「空間」(球とか浮輪とか)に「穴」が何個あるか，ということは数学になるべきことであろう．しかし同時に，視覚に頼ることなく(＝我々と同じ直観をもたない宇宙人でも理解できるように！)穴をどう定義したらよいかは，あまり明らかとは言えないであろう．このようなときにこそ，整理された概念は威力を発揮する．この場合には，基本となる幾何的アイデアは部分集合の境界を考えることなのだが，この操作を

線型写像としてとらえ直し，その像や核(9章)とよばれるベクトル空間を仲立ちとすることで，「穴」を明確にとらえることができる(17章)．こうして定義される「穴」は，空間のホモロジーとよばれる．

ほかにも，たとえば「ガロアの理論」はガロア以降に線型代数を用いて整理され，最近では符号理論(信号のデジタル化)の基礎としても用いられている[5)]．

## 0.8　まずは2行2列から

そしてこのほか，統計学における主因子分析をはじめ，経済や工学などでも行列やベクトルが用いられる場面は広い．線型性とは「原因が和になったら結果も和になる」という単純な原理が成り立つということだから，さまざまな現象の近似として応用が広くて当然だろう．1次式で表されることがらがまとめられ，現在のような線型代数の内容になってきたのは，およそ100年ほど昔(以来)と言えるようである．『自然が神』である物理における力学や電磁気学などとはおのずと性格が違い，線型代数学というきまった分野があるというよりは，数学において画用紙や定規のような役割をするものと言えばよいかもしれない．

たかが1次式，されど1次式．先のことばかりで，チンプンカンプンだったかもしれない．第1部ではまず2成分(平面)のベクトル，そして2行2列の行列からはじめよう．2行2列でも十分奥行きがあり，復習する価値はおおいにあるのだ．

## 道案内

説明なしに述べたことを中心に，知識のリンク先を示しておこう．

1） 室井和男『バビロニアの数学』東京大学出版会(2000)，第 4 章．同書によれば，3 次方程式も紀元前 16 世紀までに考察されている．

2） 本書ではわけあって，行列やベクトルに丸カッコではなく［ ］を使う．「わけ」については §1.3 (1 章 3 節)を参照．

3） 実数，複素数をこえる(真に含む)「数」の集合として 4 元数が知られているが，$ab = ba$ は成り立つと限らない．巻末の付録 1 を参照．

4） 量子力学の名著はいろいろあるが，日本語で草創期の本を読めるのはうれしい．

朝永振一郎『量子力学 I, II』みすず書房(1989)

ディラック(朝永振一郎他訳)『量子力学』岩波書店(1954)

をあげておこう．より教科書的な本もいろいろあるが，たとえば

阿部龍蔵『量子力学入門』物理テキストシリーズ，岩波書店(1987)

はよい本と思うし，読むのが楽しい

戸田盛和『物理学 30 講シリーズ』(全 10 冊) 朝倉書店

にも量子力学の巻がある．本書では最終 19 章で量子力学入門を試みる．

5） 符号理論においては，有限個の元しかもたない数の体系(加減乗除が有限個の数で閉じる．このような数の集合は有限体とよばれる――付録 1)，およびそのような数を成分とするベクトルが使われる．

内田興二『有限体と符号理論』SGC ライブラリ，サイエンス社(2000)

は，ちょうど本書の続きとして読めるだろう．また，先のことかもしれないが，ガロア理論については次をすすめておこう．

ロットマン(関口次郎訳)『ガロア理論』シュプリンガー・フェアラーク東京(1997)

ホモロジーなどについても，こわいものみたさの人には，こわくなく読める名著

長野正『曲面の数学』培風館(1968)

を強くおすすめしよう．

# [第一部 入門編]

## 2次行列と平面の1次変換

# 1章：平面ベクトルと2次正方行列

平面のベクトルについて復習する．主に(平面の)回転を題材としつつ，行列とベクトルの演算の意味を考えよう．

## 1.1 平面ベクトル

ベクトルとは，数を並べてカッコでまとめたものであった．数をいくつ並べても，また縦と横どちらに並べてもよいが，まずは数を2個縦に並べたものを考える．$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ などと書こう．これを2成分(2次元)の**縦ベクトル**または**列ベクトル**といい，数 $x, y$ をこのベクトル $\boldsymbol{v}$ の第1，第2成分とよぶ．2つのベクトルが等しいとは，成分が2つとも等しいことである．なお，数の範囲(**スカラー**とよぶ．scalar = スケールする(倍率をかえる)もの)は実数でなくてもかまわない．

ベクトル同士は加えることができ，また数 $k$ による $k$ 倍(**スカラー倍**)ができる．これは成分ごとに

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}:=\begin{bmatrix} x+x' \\ y+y' \end{bmatrix}, \qquad k\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}:=\begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

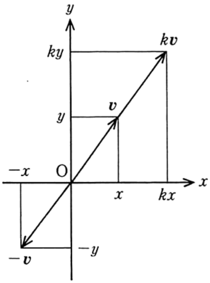
とすればよかった．以下，記号 := は，左辺を右辺で定める(定義する)，と読もう．和とスカラー倍により，一般のベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

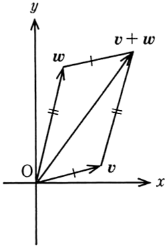
(**基本ベクトル**)で $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$ と書けることになる．

数の範囲は実数でなくてよいと書いたが，成分がともに実数ならば，2成分ベクトルは座標平面上の位置ベクトルとして理解できる．平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ を，$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ と同じと思えばよい．2つの矢印をつなぐのに対応するのがベクトルの和で，矢印の長さの伸び縮みに対応するのが実数 $k$ 倍(スカラー倍)であった．ただし $k$ が0のときは**ゼロベクトル** $\mathbf{0}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ で原点 $\mathrm{O}(0, 0)$ に，$k$ が負のときはもとのベクトルの反対向きで長さが $|k|$ 倍のものに対応する．

ベクトルの和については，以下が成り立っていた．



ベクトルの $k$ 倍



ベクトルの和

図1

$$a(b\boldsymbol{v}) = (ab)\boldsymbol{v} \tag{2}$$

$$(a+b)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{v} \tag{3}$$

$$a(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = a\boldsymbol{v}+a\boldsymbol{w} \tag{4}$$

ここで $a, b$ は任意の数，$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ は任意のベクトルで，いつも数のときに慣れ親しんでいる計算規則が使えるというわけである．たとえば $-\boldsymbol{v}$ は本来 $\boldsymbol{v}$ と足して $\mathbf{0}$ になるベクトルのこととすると，(3)は $a=1,\ b=-1$ の場合として $-\boldsymbol{v} = (-1)\boldsymbol{v}$ でなくてはならないことを含んでいる．

---

**注**　vector(＝運ぶもの)を表すのに，矢印派($\vec{v}, \vec{w}, \cdots$)は大学の教科書では少なく，太字($\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \cdots$)で書くことが多い．本書でもこれからそうすることにしよう．手で書くときは，文字のタテの部分を二重にしてそれらしくする．

---

**問**　本書では行列とベクトルの初歩を仮定する．ベクトルの演算に不安がある読者は，ここで高校の教科書を復習すること．

## 1.2 行列とベクトルの演算

2次正方行列(2行2列行列，略して2×2行列ともいう)とは，4つの数を正方形に配置してカッコでまとめたものである．

| | 第1列 | 第2列 | |
|---|---|---|---|
| 第1行 | $a$ | $b$ | **行**はヨコ！ |
| 第2行 | $c$ | $d$ | **列**はタテ！ |

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

「上」「下」をそれぞれ「第1行」「第2行」とよび，「前」「後」を「第1列」「第2列」とよぶ．たとえば，$c$ をこの行列の2行1列成分または$(2,1)$成分などとよぶ(成分のかわりに，要素ということばも用いられる)．

2つの行列が等しいとは，成分がすべて等しいことであった．また行列をひとつの文字で，たとえば $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ などと書いた．

行列 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は縦ベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ に「作用する」，すなわち左から「掛ける」ことができ，

$$A\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}:=\begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} \tag{5}$$

であった(定義)．慣れが必要な式だが，$x$ と $y$ が未知数($x', y'$ は与えられた数)の連立1次方程式

$$\begin{cases} ax+by=x' \\ cx+dy=y' \end{cases} \tag{6}$$

をまとめて

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \tag{7}$$

と表すためだと思えば，腹もたたないだろう．あとで見るように，(5)を

$$A\boldsymbol{v}=x\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \tag{8}$$

と見るのが，しばしば大事である：「前(第1列)を $x$ 倍，後(第2列)を $y$ 倍して足す」．

行列 $A$ を数 $k$ 倍することは，

$$kA:=\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

で定めた．行列同士の和も同様に簡単だが，積はやはり慣れが必要である．

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\qquad A'=\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \tag{9}$$

のとき

$$A+A':=\begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix},\qquad AA':=\begin{bmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{bmatrix} \tag{10}$$

であった(行列の演算では縦横のサイズに注意しないといけないが，今はすべて2行2列だから心配ない)．行列の積を(10)で定める理由は，2つの行列をベクトルにひきつづいて掛ければわかる．$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$のとき，

$$\begin{aligned} A(A'\boldsymbol{v}) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a'x+b'y \\ c'x+d'y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a(a'x+b'y)+b(c'x+d'y) \\ c(a'x+b'y)+d(c'x+d'y) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (aa'+bc')x+(ab'+bd')y \\ (ca'+dc')x+(cb'+dd')y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

である．したがって，$A(A'\boldsymbol{v})=(AA')\boldsymbol{v}$がすべての$\boldsymbol{v}$について(つまりすべての$x, y$について)成り立つようにしたければ，積$AA'$は(10)で定めなくてはならない．

積をこうすると，たしかにいろいろうまくいっていて，たとえば(2)～(4)に対応して以下が成り立つことが(計算で)確認できる：$k$は数，$A, B, C$は2×2行列，$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$は2成分縦ベクトルとする．

$$A(k\boldsymbol{v}) = k(A\boldsymbol{v}) \tag{12}$$

$$A(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = A\boldsymbol{v}+A\boldsymbol{w} \tag{13}$$

$$(A+B)\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{v}+B\boldsymbol{v} \tag{14}$$

$$A(B\boldsymbol{v}) = (AB)\boldsymbol{v} \tag{15}$$

$$(AB)C = A(BC) \tag{16}$$

$$A(B+C) = AB+AC, \quad (A+B)C = AC+BC \tag{17}$$

(15)は上で確かめたが((11)式)，行列の計算が不安なら，これらを確かめるのはちょうどよい練習かもしれない．

**問** (i) 2次行列$B$を列ベクトルが並んだ形$B=[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]$とみる．$A$も2次行列とするとき，$AB=[A\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_2]$であることを確かめよ．

(ii) (i)を用いて，$(AB)C=A(BC)$((16)式)を示せ．

行列の積が難しいもうひとつの理由として，和は $A+A'=A'+A$ をみたすが，積では $AA'=A'A$ と限らない——むしろ，違う方が普通である，ということがあった．たとえば $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$A'=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$ のとき

$$AA'=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\qquad A'A=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

であり，$AA'\neq A'A$ の例には事欠かない．0章(§0.3)の空間の回転の話は，このことの3行3列における例を提供するのだが，その前に平面の回転について考えておこう．実際，行列のベクトルへの作用が，連立1次方程式の書きかえで終ってはつまらない．

## 1.3　平面の回転

平面の点を，原点を中心としていっせいにある角度 $\theta$(ラジアン)だけ回転移動する．点 $\mathrm{P}(x,y)$ を原点 $\mathrm{O}(0,0)$ を中心に $\theta$ だけ回転した点を $\mathrm{P}'(x',y')$ として，この $x',y'$ を $x,y$ と $\theta$ で表そう．

単位円周上にあって，$x$ 軸の正の向きから角度 $\alpha$ の点の座標が $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ であった．これを拡大すれば，P が半径 $r>0$ の円上にあるとき

$$x=r\cos\alpha,\qquad y=r\sin\alpha$$

と書ける．これを $\theta$ だけ回転した点 P′ の座標は，当然

$$x'=r\cos(\theta+\alpha),\qquad y'=r\sin(\theta+\alpha)$$

である．そこで加法定理を使うと

$$\begin{aligned}x'&=r\cos(\theta+\alpha)=r(\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\sin\alpha)\\&=x\cos\theta-y\sin\theta,\\y'&=r\sin(\theta+\alpha)=r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)\\&=x\sin\theta+y\cos\theta.\end{aligned}\tag{18}$$

これが回転を表す式である．(18)は，行列とベクトルを用い

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\tag{19}$$

と書ける．この右辺の2次行列を回転(の)行列とよぼう．なお，加法定理を出すときと同じ図を考えても，(18)が(もちろん)得られる(図2)．

(19)は，P の位置ベクトル $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ を回す式だが，位置ベクト

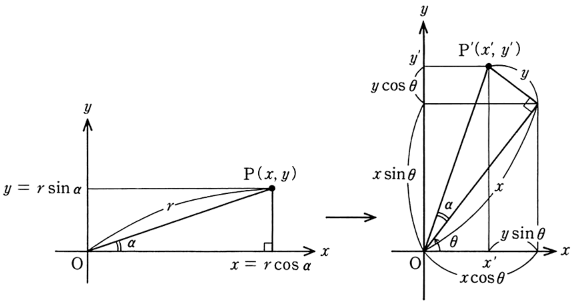



**図2**　平面の角 $\theta$ だけの回転

ル以外を回しても同じことである．$\boldsymbol{v}$ に対して(19)できまるベクトル $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{v}$ の関数のように見て，$f_\theta\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$ または $f_\theta(\boldsymbol{v})$ と書こう(回転という操作そのものを $f_\theta$ と書くわけである．回転角 $\theta$ を忘れないよう，$f$ の添字にしておく．)：ベクトルのカッコを[　]にしておくと，こういうときに見やすい．(8)の書き方をすれば，(19)を次のようにも書ける．

$$f_\theta\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \tag{20}$$

この式で $x, y$ の係数になっているベクトルは，それぞれ $\boldsymbol{v}$ が基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ のときの $f_\theta(\boldsymbol{v})$ の値であることに注意しよう．

$$f_\theta(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} (= x \text{ の係数})$$

$$f_\theta(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} (= y \text{ の係数})$$

これらが $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を $\theta$ だけ回したベクトルであることは図3でも確認できる．そしてあたりまえだが，この2つのベクトルを並べれば

$$\begin{bmatrix} f_\theta(\boldsymbol{e}_1), f_\theta(\boldsymbol{e}_2) \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{21}$$

と，もとの行列になる(ベクトルも行列も「数を並べてカッコでまとめたもの」だから，2重のカッコは1重にしてよいであろう)．

一般にも $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の第1列 $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ と第2列 $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ には，$A$ を基本ベク

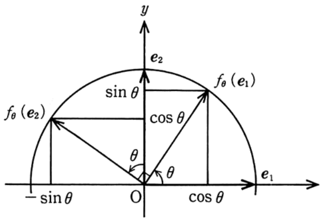



図3 基本ベクトルの回転

トルにかけてできるベクトルという意味がある：すなわち

$$A = [A\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2]. \tag{22}$$

**問** (i) 次の位置ベクトルが表す点を，原点を中心に $\pi/6$ 回転せよ．

(ア) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (イ) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ウ) $\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$

(ii) (22)を確かめよ．

## 1.4 行列と1次変換

回転がなぜ行列で書けるのかは考える価値がある．

一般に，平面の1点 $\mathrm{P}(x, y)$ に同じ平面の1点 $\mathrm{P}' = f(\mathrm{P})$ を対応させる規則 $f$ について，$\mathrm{P}'$ の座標 $(x', y')$ が $x$ と $y$ の定数項のない1次式（**斉次1次式**）で表されるとき，$f$ を平面の**1次変換**または**線型変換**という．

原点を中心とする回転は，(18)のように定数項のない1次式で表されるので，1次変換である．

また(6)の式も，$x', y'$ が $x, y$ できまる式とみれば1次変換である．実際 $x, y$ で書ける斉次1次式といったらこれ以外の形はありようがないので，これが最も一般の1次変換である．(6)を(7)の形に表すために行列とベクトルの積があるのだから，結局1次変換とは行列で(7)のように

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} \ (\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{OP}})$$

と書けるものといっても同じである：

$$1次変換\ f \underset{に対応}{\overset{1対1}{\longleftrightarrow}} 位置ベクトルの行列\ A\ 倍. \tag{23}$$

したがって平面の1次変換は，(7)の行列 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の4つの成分の分だけいろいろあり，このいろいろは $f(\boldsymbol{e}_1)=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2)=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ としてきまる((22)式)．いわば $a, b, c, d$ は1次変換 $f$ のデータであり，これらが $f$ を完全に決定する．

ベクトルの行列倍については，

$$\begin{cases} A(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = A\boldsymbol{v}+A\boldsymbol{w} \\ A(k\boldsymbol{v}) = kA\boldsymbol{v} \end{cases}$$

が成り立っていた(§1.2)．ベクトル $\boldsymbol{v}$ にベクトル $\boldsymbol{v}'=f(\boldsymbol{v})$ を対応させる規則 $f$ が，同じ性質

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{w}) & (24) \\ f(k\boldsymbol{v}) = kf(\boldsymbol{v}) & (25) \end{cases}$$

をみたすとしよう．すると $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$ に対して

$$f(\boldsymbol{v}) = f(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2) \overset{(24)}{=} f(x\boldsymbol{e}_1)+f(y\boldsymbol{e}_2) \overset{(25)}{=} xf(\boldsymbol{e}_1)+yf(\boldsymbol{e}_2).$$

つまり $x, y$ の1次式となる．逆に $f$ がこのような(＝定数項のない)1次式なら(24), (25)は明らかだから，結局(24), (25)は $f$ が1次変換であることと同値である．

$f$ が1次変換であることを保証する(24), (25)の2条件は，**線型性**とよばれる(線型 = linear = 1次なので，1次性とよんでよいくらいである)．

さて，回転はなぜ行列で書けたのだろう．(23)により，これはなぜ1次変換であるか，という問いと同じである．だから回転 $f_\theta$ について線型性(24), (25)の2条件が成り立つ理由がわかればよい．

まず，条件(24)の意味を考える．ベクトルの和があるから，和を考えるときの平行四辺形を思いだそう．4頂点の位置ベクトル $\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ の回転による行き先がそれぞれ $\boldsymbol{0}, f_\theta(\boldsymbol{v}), f_\theta(\boldsymbol{w}), f_\theta(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ である($f_\theta$ で原点は動かない)．このとき $f_\theta(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ は回転でできた「新しい」平行四辺形の頂点として，「新しい」2辺 $f_\theta(\boldsymbol{v}), f_\theta(\boldsymbol{w})$ の和でなくてはならない．すなわち $f_\theta(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = f_\theta(\boldsymbol{v})+f_\theta(\boldsymbol{w})$ である(図4)．

条件(25)も，$k$ 倍が $k$ 倍にうつるということで，もはや明らかだろう．線型性(24), (25)の内容は「$f$ で和が和に，スカラー倍がスカラー倍にうつ

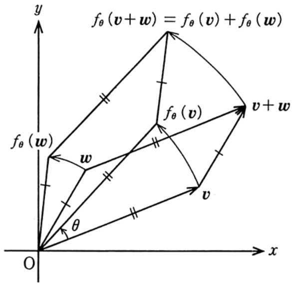



図4　回転で和は和にうつる

る」つまり「$f$ が(ベクトルの)和とスカラー倍を保つ」といえるが，図形的には平行四辺形が平行四辺形にうつるということである．そして回転の場合，これは合同なものにうつるというおまけつきで成り立っている．

平面の回転は複素数を用いても表現できるが，次元が高くなるとそうはいかない．それでも今と同じ原理により，回転は行列で書けることになる．

**問**　線型性の条件(24)，(25)は，次の一本の式と同値である：

$$f(k\boldsymbol{v}+l\boldsymbol{w}) = kf(\boldsymbol{v})+lf(\boldsymbol{w}) \tag{26}$$

(すべての実数 $k, l$，ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ について)．このことを示せ．

## 1.5 まとめ

原点を中心とする回転 $f_\theta$ ($\theta$ は回転角) はベクトルの和と実数倍を保ち，1次変換である．したがって行列で書ける．これが今わかったことである．この理解をもとにすると，回転を表す問題は画期的に簡単になっている．

実際，行列要素を決めさえすればよい．それには $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を回してできるベクトルの成分がわかればよいが，図3からただちに(図2はなくても！)

$$f_\theta(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \qquad f_\theta(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}.$$

よって $f_\theta$ は，行列

$$[f_\theta(\boldsymbol{e}_1), f_\theta(\boldsymbol{e}_2)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

で表される：$f_\theta\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

原点を中心にした平面の $k$ 倍(拡大・縮小)も，同様に1次変換である．(図4のように考えたとき，$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を2辺とする平行四辺形が拡大・縮小されるだけであるから.）　ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の $k$ 倍を行列で表せば，もちろん

$$k\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

である．スカラー倍を表す右辺の2次行列は**スカラー行列**とよばれる．

また，原点を通る直線 $ax+by=0$ ($a, b$ は実数，$a^2+b^2 \neq 0$)についての線対称変換(折り返し，裏返し)も，回転と同じ原理により1次変換である：図形が合同なものにうつされる結果，ベクトルの和も実数倍も保たれる．したがって，これも行列で書ける．

---

**注**　$f(k\boldsymbol{v}) = kf(\boldsymbol{v})$ のためには $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ でなくてはならない．($k$ 倍を定めるのに，原点が選ばれている．$k$ を0にすると，すべての点が原点に引き寄せられる.）　これが特に原点を通る直線について考えた理由である．

---

**問**　平面の次の変換を表す行列 $A$ を求めよ．

(i)　$x$ 軸についての折り返し

(ii)　直線 $x = y$ についての折り返し

## 1.6　ことばの準備

さて，集合や写像のことばや記号を使うことがこの先便利である．ここで少しまとめておこう[1]．

**ア)**　自然数の全体を $\boldsymbol{N}$，整数の全体を $\boldsymbol{Z}$，有理数の全体を $\boldsymbol{Q}$，実数の全体を $\boldsymbol{R}$，複素数の全体を $\boldsymbol{C}$ で表す．ものの集まりを**集合**といい，$X$, $Y, \cdots$ などで表す．$\boldsymbol{N}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ はそれぞれ集合である．もの $x$ が集合 $X$ に含まれるとき，$x$ は $X$ の**元**または**要素**であるといい，$x \in X$ ないし $X \ni x$ と書く．含まれないとき，$x \notin X$ ないし $X \not\ni x$ と書く．

集合を表すには，たとえば $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ のように元を書き並べたり，またはその集合を定める条件を次のように書いたりする．

$$A=\{x \mid x \text{ は実数}, \ x^2=1\}$$

この場合，もちろん $A=\{1, -1\}$ である．ここで条件が $x^2=-1$ であるとこれを満たす実数はない．そこで，元をまったく含まない**空集合**を考え，$\varnothing$ または $\{\ \}$ で表わす．$\{x \mid x \text{ は実数}, \ x^2=-1\}=\varnothing$ である．

$X$ の元がすべて $Y$ に含まれるとき，$X$ は $Y$ の**部分集合**である($X$ は $Y$ に含まれる)といい，$X \subset Y$ あるいは $Y \supset X$ と表す．$X$ は $X$ 自身の部分集合である．空集合は任意の集合の部分集合と考える．

**イ)**　集合 $X, Y$ に対し，記号 $X \cup Y$，$X \cap Y$ で次の集合を表す．

$$X \cup Y=\{x \mid x \in X \text{ または } x \in Y\} \quad (X \text{ と } Y \text{ の\textbf{合併集合}})$$

$$X \cap Y=\{x \mid x \in X \text{ かつ } x \in Y\} \quad (X \text{ と } Y \text{ の\textbf{共通部分}})$$

整数 $m \in \boldsymbol{Z}$ の倍数全体を $m\boldsymbol{Z}=\{mn \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$ と記すと，$2\boldsymbol{Z} \cap 3\boldsymbol{Z}=6\boldsymbol{Z}$，$2\boldsymbol{Z} \cup 3\boldsymbol{Z}=\{0, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \cdots\}=\{6n+k \mid n \in \boldsymbol{Z}, \ k=\pm 2, 3\}$ である．

また，それぞれの元を座標のように並べてできるものの全体

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, \ y \in Y\} \tag{27}$$

が考えられる．これを $X$ と $Y$ の**積集合**(直積集合)という．$X$ も $Y$ も $\boldsymbol{R}$ (実数直線)なら，(27)は平面の点全体と考えられるから，平面を $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ とか(略して)$\boldsymbol{R}^2$ と書く．2成分の実列ベクトル全体も，$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を平面の点(＝積集合の元) $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ と思ってしまって，やはり $\boldsymbol{R}^2$ と書く．成分が複素数のときは，当然 $\boldsymbol{C}^2$ と書くことになる．

**ウ)**　おなじみの1変数の関数は，実数 $x \in \boldsymbol{R}$ にひとつの実数 $f(x) \in \boldsymbol{R}$ を対応させるものであった．一般に $X$ と $Y$ を集合とするとき，$x \in X$ のそれぞれに対し $Y$ の元を1つ(2つ以上ではいけない)対応させる規則があるとき，この規則を $X$ から $Y$ への**写像**という．$f$ が $X$ から $Y$ への写像であることを，$f: X \to Y$ と書く．

1変数関数は $\boldsymbol{R}$(の一部である定義域)から $\boldsymbol{R}$ への写像である．$f$ によって $x$ に対してきまる $Y$ の元を $x$ の**像**とよび，関数と同様 $f(x)$ などと書く．なお $f(x)=y$ であることを，$f: x \mapsto y$ (矢印の根元に注意)とも書くと，写像の合成を扱うとき便利である(§2.1)．

今回考えた平面の回転は，$\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^2$ への写像の例である．また写像 $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ で，条件(24)，(25)

$$f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v})+f(\boldsymbol{w}), \qquad f(k\boldsymbol{v}) = kf(\boldsymbol{v})$$

(すべてのベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ と実数 $k$ について)をみたすものを平面の1次変換(線型変換)とよんだことになるが，線型写像，1次写像(linear map)ということばも当然よく使われる．

**エ)** 簡単だが大事な2次正方行列として，**単位行列** $E$ と**零行列** $O$ がある：

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

単位行列は，すべての2成分ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して「何もしない」$\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v}$ という**恒等写像**を表す：$E\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ (恒等写像は「自分自身に写す」の意で identity map とよばれ，2文字で $id$ と書くことが多い)．また**零写像** $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{0}$ を表すのが零行列 $O$ である：$O\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$．なお単位行列は，$E\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v}$ なので1と書いてしまうことも多い：$E = 1$ (ベクトルに対する効果が同じとみて，等号で結ぶわけである)．同様に，$k$ 倍を表すスカラー行列 $kE$ をただ $k$ とも書く．

**オ)** 一般に写像 $f: X \to Y$ について，

$$x, x' \in X, \ \ x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x') \tag{28}$$

(違うものが違うものにうつる)であるとき，$f$ は**単射**であるという．また

$$\text{すべての } y \text{ に対し，} f(x) = y \text{ となる } x \in X \text{ がある} \tag{29}$$

(すべての $y$ に，対応する $x$ がある)とき，$f$ は**全射**であるという．単射かつ全射のとき**全単射**というが，これは $X$ の元と $Y$ の元が $f$ によって1対1に対応することにほかならない．

単位行列倍する写像 $E: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ ($\boldsymbol{v} \mapsto E\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$) は単射であり，また全射でもある．一方，零行列 $O$ 倍の場合は全射でも単射でもない．

**問** 次の写像 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ はそれぞれ全射か．また，単射か．

(i) $f(x) = kx$ ($k$ は実数) (ii) $f(x) = e^x$

## 道案内

1）本書では集合や写像について深い知識は必要としないが，やはり知っているに越したことはない．参考書として以下が標準的である．

松坂和夫『集合・位相入門』岩波書店(1968)

また高校までの数学の復習のためには次を挙げておこう．

高崎金久『新入生のための数学序説』実教出版(2001)

やや古いが含蓄のある，代数一般への入門的な本として

高木貞治『代数学講義』共立出版(1965)

も一読に値する．この書における行列の扱いは，歴史を知るきっかけともなるだろう．多項式の扱いや3次方程式，4次方程式の解法などについても参考とされたい．

## 練習問題

**1-1** $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'$ は2成分ベクトル，$A, A'$ は2次行列とする．次を示せ．

(i) すべての $\boldsymbol{v}$ に対し $A\boldsymbol{v} = A'\boldsymbol{v} \Longleftrightarrow A = A'$.

(ii) すべての $A$ に対し $A\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{v}' \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'$.

**1-2** $xy$ 平面において，次の図形を原点を中心として正の向き(反時計回り)に30°回転した図形の方程式を求めよ．

(i) 直線 $y = 2x+3$　(ii) 放物線 $y = x^2$

**1-3** (i) 平面の1次変換で，直線は直線または1点にうつり，平行な2直線は平行な2直線にうつることを示せ．

(ii) 互いに垂直な2直線が垂直な2直線にうつらない1次変換の例をあげよ．

**1-4** $f: X \to Y$ を写像とし，$A \subset X$ に対し $f(A) := \{f(x) | x \in A\} \subset Y$ とする($f$ による $A$ の像)．$A, B$ が $X$ の部分集合のとき次は成り立つか．

(i) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$　(ii) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

**1-5** (i) $f: X \to Y$ が単射 $\Longleftrightarrow [f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x']$ を示せ．

(ii) $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ が線型(1次変換)ならば，次は同値であることを示せ：

$f$ が単射 $\Longleftrightarrow f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ならば，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

# 2章：平面の1次変換の合成，行列式

平面 $\boldsymbol{R}^2$ から平面 $\boldsymbol{R}^2$ への写像 $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ で，**線型性**

$$f(k\boldsymbol{v}+l\boldsymbol{w}) = kf(\boldsymbol{v})+lf(\boldsymbol{w}) \qquad (k, l \in \boldsymbol{R},\ \ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{R}^2) \tag{1}$$

をみたすものを，平面の**1次変換**(線型写像)とよんだ(§1.4)．ベクトルの和を和に，$k$ 倍を $k$ 倍にうつすとも言える条件だが，これと「ベクトルの行列倍」で表せることが同値である．これが1章の結論の1つだった．本章では行列の積と行列式について，1次変換の立場から考えよう．

## 2.1　写像の合成と行列の積

一般に，3つの集合 $X, Y, Z$ と2つの写像

$$f': X \longrightarrow Y, \qquad f: Y \longrightarrow Z$$

があるとき，$f$ と $f'$ を続けてほどこす写像

$$X \overset{f'}{\longrightarrow} Y \overset{f}{\longrightarrow} Z \tag{2}$$

$$(\boldsymbol{x} \ \mapsto\ f'(\boldsymbol{x})\ \mapsto\ f(f'(\boldsymbol{x})))$$

が考えられる．これを $f$ と $f'$ の**合成写像**といい，$f \circ f'$ と書く：つまり

$$(f \circ f')(\boldsymbol{x}) := f(f'(\boldsymbol{x}))$$

である．

---

順番に注意．$f$ に $f'$ を代入するので，$f$ を左にして $f \circ f'$ と書くが，(2)では $f'$ が左にくる．なお左辺で $f \circ f'$ にカッコをつけたのは，「これが1つの写像である」というつもりで，その $\boldsymbol{x}$ に対する値を右辺で定義するというのが「$:=$」の意味．

---

$f$ と $f'$ がともに平面 $\boldsymbol{R}^2$ の1次変換とすれば，これらは行列で

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}, \qquad f'(\boldsymbol{v}) = A'\boldsymbol{v}$$

$$\left(A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad A' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\right)$$

と表せる．当然

$$f(f'(\boldsymbol{v})) = f(A'\boldsymbol{v}) = A(A'\boldsymbol{v}) \tag{3}$$

である．行列の積は $A(A'\boldsymbol{v}) = (AA')\boldsymbol{v}$ のようにきめたから，(3)は

$$(f \circ f')(\boldsymbol{v}) = (AA')\boldsymbol{v}$$

と書ける．つまり，1次変換の合成 $f \circ f'$ を表すように行列の積 $AA'$ をきめたのである．

---

より直接に：$AA' = \begin{bmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{bmatrix}$ の第1列は

$$\begin{bmatrix} aa'+bc' \\ ca'+dc' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' \\ c' \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} a' \\ c' \end{bmatrix}\right) = f(f'(\boldsymbol{e}_1))$$

であるし，同様に第2列は $f(f'(\boldsymbol{e}_2))$ である．つまり

$$AA' = [f \circ f'(\boldsymbol{e}_1), f \circ f'(\boldsymbol{e}_2)].$$

これも $AA'$ が合成 $f \circ f'$ を表すことを示している．

---

3つ以上の行列の積も，同様に3つ以上の1次変換の合成を表す．

**問**　(i)　3つの写像 $f, g, h$ の合成について次の結合法則を示せ．

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

(ii)　(i)を用い，行列の積の結合法則 $(AB)C = A(BC)$ を示せ．

(iii)　(ii)より，4つ以上の行列の積をどこから計算してもよいことが保証される：たとえば $(AB)(CD), A((BC)D), ((AB)C)D$ がすべて等しいことを示せ．

## 2.2　回転の合成

原点を中心とする平面の回転が1次変換であることを1章で調べた．原点を中心とする角度 $\theta', \theta$ の回転を引き続き行ったら，当然角度 $\theta+\theta'$ の回転になり，これが2つの回転の合成である．つまり原点中心，角度 $\theta$ の回転を $f_\theta$ と書けば

$$f_\theta \circ f_{\theta'} = f_{\theta+\theta'}. \tag{4}$$

$f_\theta$ は回転行列 $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ を(位置)ベクトルにかけることで表されたから，(4)は

$$R(\theta)R(\theta') = R(\theta+\theta') \tag{5}$$

を意味している．確かめてみると，

$$左辺 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & -\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta' \end{bmatrix},$$

$$\text{右辺} = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{bmatrix}$$

なので，(5)は三角関数の加法公式により正しい．一方(4)を(直観的に)認めれば，これは加法公式を導く方法にもなる．つまり，「加法公式は行列の積で出る」と，記憶の節約ができる！（でも，覚えた方がよい．）

**問**　$R(\theta)^3(=R(3\theta))$ を計算し，$\cos 3\theta, \sin 3\theta$ を $\cos\theta, \sin\theta$ で表せ．

## 2.3　複素数の行列表示

平面の回転は複素数のかけ算でも表せるが，ここでは行列を用いて表した．両者の関係を考えておこう．

もちろん，平面 $\boldsymbol{R}^2$ の1点 $\mathrm{P}(a, b)$ を複素数 $a+ib \in \boldsymbol{C}$ と思うこと(つまり $\boldsymbol{R}^2$ を $\boldsymbol{C}$ と思うこと)が出発点である．すると $\boldsymbol{e}_1=1$，$\boldsymbol{e}_2=i$(虚数単位)，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 = a+ib$ である[1)]．

---

上のように等号で結ぶことに抵抗を感ずる読者は幸いである．$\boldsymbol{R}^2$ も $\boldsymbol{C}$ も平面だが，ベクトルと数で意味あいが違う．「同一視する」(同じと思う)ための写像を介するのが玄人好みで，その場合「同一視の写像 $\iota : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{C}$ を $\iota(a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2) = a+bi$ で定める」などの言い方をする．($\iota$(イオタ)は同一視 identify のつもり．)

---

複素数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ($r, \theta$ は実数，$r \geqq 0$) による $z$ 倍の写像 $a+bi \mapsto z(a+bi)$ を考える．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，原点を中心に $\theta$ だけ回転し $r$ 倍に拡大される．これは(平行四辺形を平行四辺形にうつすので) 1つの1次変換である．このことは複素数の演算の性質

$$z(kw + k'w') = zkw + zk'w' = kzw + k'zw'$$

からもわかる：$k, k'$ が実数なら，これは実数をスカラーと考えた線型性の式(1)と見ることができる．

そこで，$z = a+ib$ 倍を表す行列を求めよう($a, b$ は実数)．$w = x+iy$ ($x, y$ は実数)とすれば

$$zw = (a+ib)(x+iy) = (ax-by) + i(bx+ay).$$

$x+iy=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ と見て，$x+iy$ の $z$ 倍を $z\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)$ と書けば，これを

$$z\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}ax-by\\bx+ay\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&-b\\b&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\tag{6}$$

と書ける．つまり，$z=a+ib$ 倍を表す行列は

$$A_z:=\begin{bmatrix}a&-b\\b&a\end{bmatrix}\tag{7}$$

である．第1列のデータは $\boldsymbol{e}_1=1$ の $z$ 倍による像(＝行き先)$a+ib$ に対応し，第2列は $\boldsymbol{e}_2=i$ の像 $-b+ia$ に対応している．

とくに $z=\cos\theta+i\sin\theta$ について，今求めた行列は

$$A_{\cos\theta+i\sin\theta}=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$$

となる．これは回転行列 $R(\theta)$ であるから，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ によるかけ算が複素数平面の回転を表すことが(あらためて)確認できた．このように，回転の2つの扱い方は，複素数倍を行列で表すことで結ばれている．

さらに，任意の複素数 $z=a+bi$，$w=c+di$ $(a,b,c,d\in\boldsymbol{R})$について

$$A_{z+w}=A_z+A_w,\qquad A_{zw}=A_zA_w$$

が成り立っている．(確かめよう．)　これは複素数の演算がすべて行列の世界で実現できたことを意味する．そこで $A_z$ を**複素数** $z\in\boldsymbol{C}$ **の行列表示**とよぶのが妥当(モットモ)だろう．特に1と $i$ の行列表示はそれぞれ

$$A_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}(=E=R(0)),\qquad A_i=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\left(=R\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

で，$A_i^2=-E=A_{-1}$：これは $i^2=-1$ に対応する．

**問**　行列の積は $AB=BA$ をみたすと限らないが，(7)については $A_zA_{z'}=A_{z'}A_z=A_{zz'}$ であることを確かめよ——複素数の積を表すからにはこうあるべき．

## 2.4　逆行列と逆写像

2次正方行列 $A$ に対して，

$$AB=E\quad\text{かつ}\quad BA=E\qquad(E\text{ は単位行列})\tag{8}$$

であるような2次行列 $B$ が**あれば**，$B$ を $A$ の**逆行列**とよんで $A^{-1}$ と表

す．逆行列をもつ行列を**可逆**(な)**行列**とか**正則**(な)**行列**とよぶ．

---

一般に写像 $f: X \to Y$ に対し，すべての $x \in X$，$y \in Y$ に対し $g \circ f(x) = x$，$f \circ g(y) = y$ である写像 $g: Y \to X$ があれば，$g$ を $f$ の逆写像といい $f^{-1}$ と書く．(1変数関数なら逆関数にあたる．）写像 $f$ に対し逆写像はあれば1つで，$f$ が線型性をもてば $f^{-1}$ もそうとわかる(練習問題 6-5)．行列 $A$ で表される $f$ が逆写像 $f^{-1}$ をもつとき，これを表すのが $A^{-1}$ ということになる．

なお(8)で $AB = E$，$B'A = E$ としても，はじめの式に左から $B'$ を掛ければ $B = B'$ でなくてはならないことがわかる(右逆元と左逆元の一致)．

---

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ としよう．等式

$$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \tag{9}$$

は，$x$ と $y$ の連立1次方程式

$$\begin{cases} ax + by = x' \\ cx + dy = y' \end{cases} \tag{10}$$

と同じ内容である．$A$ の逆行列 $A^{-1}$ があれば，(9)に**左から**掛けて

$$A^{-1}A\boldsymbol{v} = A^{-1}\boldsymbol{w} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{v} = A^{-1}\boldsymbol{w} \tag{11}$$

となる．つまり逆行列は $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ の解 $\boldsymbol{v}$ を与える．

一方(10)の第1式の $d$ 倍，第2式の $b$ 倍から

$$\begin{cases} dax + dby = dx' \\ bcx + bdy = by' \end{cases}$$

$$\therefore \quad (ad - bc)x = dx' - by', \tag{12}$$

同様に第2式を $a$ 倍，第1式を $c$ 倍して引けば

$$(ad - bc)y = -cx' + ay' \tag{13}$$

よって $ad - bc \neq 0$ なら，(9)の解 $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \tag{14}$$

となる．(11), (14)を比べると，求める逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{15}$$

でなくてはならない．実際

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = E,$$

同様に $AA^{-1} = E$ も確かめられる．

一方 $ad-bc = 0$ のとき，(12), (13)から，方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ は $dx'-by' = 0$, $-cx'+ay' = 0$ でない限り解がない．(11)より，逆行列があればすべての $\boldsymbol{w}$ に対して方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ が解けるはずなのに変である．

これは仮定が間違いであり，よって逆行列はない．結局

**定理 1**　行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の逆行列が存在するための必要十分条件は $ad-bc \neq 0$ である．このとき，逆行列は $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ で与えられる．

**定義 1**　行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対し，$ad-bc$ を $A$ の**行列式**とよび，

$$\det(A), \qquad |A|, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

などと書く．　□

---

行列式は英語では determinant で，「決定するもの」の意．名付けたのはガウスであるという．たしかに(10)の解のあるなしだけでなく，解(14)そのものも

$$x = \begin{vmatrix} x' & b \\ y' & d \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \qquad y = \begin{vmatrix} a & x' \\ c & y' \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \tag{16}$$

と，行列式だけで書けて(決定されて)しまう．これは**クラメルの公式**とよばれるものの 2 次(未知数 2 個)の場合である(§ 11.4 および p 182 道案内 1)参照)．

---

**問**　(i)　回転行列 $R(\theta)$ の行列式は 1 であり，$R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$ (逆行列は逆回転)である．これらを示せ．

(ii)　複素数 $z$ の行列表示 $A_z$((7)式)について $\det A_z = |z|^2$．よって $z \neq 0$ のとき逆行列をもち，$A_z^{-1} = A_{1/z}$ である．これらを示せ．

## 2.5　行列式と 1 次変換の面積比

行列式の幾何的な意味を考えよう．ここでは数はすべて実数とする．$A = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が定める平面の 1 次変換を $f: \boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$ とする．こ

のとき $\boldsymbol{v}_1 = f(\boldsymbol{e}_1)$，$\boldsymbol{v}_2 = f(\boldsymbol{e}_2)$ である．

今，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を2辺とする単位正方形(の周と内部) $U$ を考え，常識的に面積1と思うことにする(unit ＝ 単位 ＝ 1のつもり)．この正方形 $U$ の $f$ による像(行き先)とその面積を求めよう．$U$ の $f$ による像を $f(U)$ と書く．集合の記号を用いれば

$$f(U) = \{f(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in U\} = \{A\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in U\}.$$

行列 $A$ による1次変換で，直線 $\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{d}$ ($\boldsymbol{d}$ は方向ベクトル，$t$ は実数を動く)の像は $A\boldsymbol{v} + tA\boldsymbol{d}$ となる．これは $A\boldsymbol{d}$ が $\boldsymbol{0}$ でない限りまた直線を表す．$\boldsymbol{v}$ が違うだけの平行な2直線は，平行な2直線にうつされる．

単位正方形 $U$ についても，辺の方向ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の像 $A\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{v}_1$，$A\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{v}_2$ が一直線上になければ，$U$ の2組の対辺は2組の平行な線分にうつる．よってこのとき $f(U)$ は平行四辺形(周と内部)となる(図1)．

---

より詳しくは次のとおり．まず正方形 $U$ の周および内部の点は

$$x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2, \qquad 0 \leqq x, y \leqq 1$$

と書ける．すると $f(U)$ の点Pは

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) = x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2, \qquad 0 \leqq x, y \leqq 1$$

と表せる．このとき

(イ) $y = 0$ とし $x$ を0から1まで動かすと，Pは原点から $\boldsymbol{v}_1$ の終点まで動く．

(ロ) $x = 0$ とし，$y$ を0から1まで動かすと，原点から $\boldsymbol{v}_2$ の終点まで動く．

(ハ) $y = 1$ として $x$ を0から1まで動かすと，今度は $\boldsymbol{v}_2$ の終点から $\boldsymbol{v}_1$ の方向に，ちょうど $\boldsymbol{v}_1$ の長さまで動いていく．

(ニ) 最後に $x = 1$ として $y$ を0から1まで動かすと，$\boldsymbol{v}_1$ の終点から $\boldsymbol{v}_2$ の方向に，ちょうど $\boldsymbol{v}_2$ の長さまで動いていく．

(イ)と(ハ)，(ロ)と(ニ)はそれぞれ平行な2線分で，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ を2辺とする平行四辺形の周ができた．$0 < x, y < 1$ がともに動けば，この周の内部もつくされ，これが $f(U)$ となる．

---

$f(U)$ の面積を求めよう．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ はとりあえず図1のような位置関係であるとする．そして，$\boldsymbol{v}_2$ の $y$ 成分の絶対値を高さにもち，$x$ 軸を底辺とするように等積変形して，(底辺×高さ)で面積を求める．

等積変形後の底辺の長さは $\boldsymbol{v}_2$ の対辺を延長した直線 $l$ の $x$ 切片の絶対値である．直線 $l$ は「原点を通り方向ベクトルが $\boldsymbol{v}_2$ の直線を $\boldsymbol{v}_1$ だけ平行移動したもの」だから，その上の任意の点 $\mathrm{Q}(x, y)$ は，ベクトルを用い

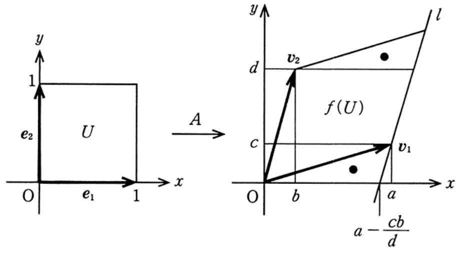



図1　$A=[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ が定める1次変換

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\boldsymbol{v}_1+t\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}a+tb\\c+td\end{bmatrix}\qquad (t\text{ は実数})$$

と表される．よって求める $x$ 切片は

$$y=0\Longleftrightarrow c+td=0\Longleftrightarrow t=-\frac{c}{d}$$

より，$a-\dfrac{c}{d}b$．（高さ）$=|(\boldsymbol{v}_2$ の $y$ 成分$)|=|d|$（縦棒は絶対値）だから

$$f(U)\text{ の面積}=\left|\left(a-\frac{c}{d}b\right)\cdot d\right|=|ad-bc|$$

とわかる．$d=0$ のときも，$f(U)$ の面積は底辺 $|b|$，高さ $|c|$ の平行四辺形の面積として $|bc|$ であるから，結局次が成り立つ．

**定理 2**　$f(U)$ の面積 $=|\det A|$　　（行列式の絶対値）

行列 $A$ で表される1次変換 $f$ は，単位正方形を $|\det A|$ だけの面積をもつ平行四辺形にうつし，したがって種々の図形の面積もやはり $|\det A|$ 倍にする．

絶対値をとる前の行列式を理解するには，符号も気になるところである．$\boldsymbol{v}_1$ の方向を基準に，$\boldsymbol{v}_2$ は $\theta$ 回転した方向としよう（$\boldsymbol{v}_1\neq\boldsymbol{0}$ とする）．回転行列を使えば $\boldsymbol{v}_2=kR(\theta)\boldsymbol{v}_1$ $(k>0)$ と書ける．$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}$ として

$$\det(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)=|\,\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\,|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, kR(\theta) \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} a & k(a\cos\theta - c\sin\theta) \\ c & k(a\sin\theta + c\cos\theta) \end{vmatrix}$$

$$= k(a^2+c^2)\sin\theta\,(= |\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|\sin\theta) \tag{17}$$

となる(ここでもちろん $|\boldsymbol{v}_1| = \sqrt{a^2+c^2}$ は $\boldsymbol{v}_1$ の長さ，よって(17)の右辺も $\det(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ が $f(U)$ の面積の $\pm 1$ 倍という式)．$\sin\theta$ の正負は $\boldsymbol{v}_2$ が $\boldsymbol{v}_1$ の左側か右側で決まるが(図2)，これが行列式の符号を決める．

$A$ は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ をそれぞれ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ にうつすのだから，結局 $\det A$ の正負は $A$ 倍変換で平面が裏返るか(向きを変えるか)どうかを表している．

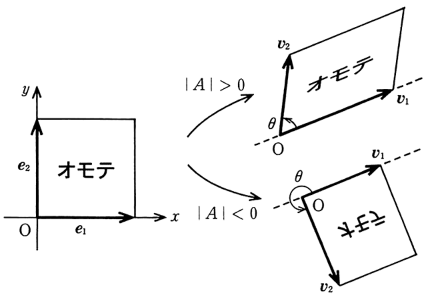



**図2**　行列式 $|A| = |\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2|$ の符号と向き

行列式の重要な性質として，次の**乗法性**がある．

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{18}$$

ここで $A, B$ は任意の2次正方行列で，実行列(成分が実数)でなくてもOK．一度は計算で確かめよう．

実行列の場合，行列式の絶対値は面積比というさっきの定理によれば，乗法性は「1次変換による面積比が $A$ で $k$ 倍，$B$ で $h$ 倍なら，積 $AB$ では $kh$ 倍」と，常識的に理解できる．符号についても，(18)によれば「積の行列式の符号がそれぞれの行列式の符号の積」だが，これも「紙を二度裏返すともとどおり」という経験則にかなっている．

行列式が面積を表すこと，そしてその乗法性は，多変数の微積分の変数

変換などでも大事になる[2])．

なお(18)で $B = A^{-1}$ のときを考えれば，$\det(AB) = \det E = 1$ なので

$$\det(A)\det(A^{-1}) = 1 \qquad \therefore \quad \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}. \tag{19}$$

**例1　ア）** $k$ 倍を表すスカラー行列 $kE$ について，行列式は $k^2$ である．逆行列は $k \neq 0$ なら存在し，その行列式は $|k^{-1}E| = k^{-2}$ である．

**イ）** 回転行列 $R(\theta)$ の行列式は1である．(回転は面積を変えず，裏返しもしない．)

**ウ）** 平面の「ずらし」(図3)を表す $A = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(t \in \boldsymbol{R})$ についても，行列式は1である．

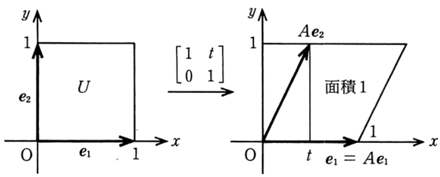



**図3**　平面のずらし

**エ）** 複素数 $z = a + ib$ $(a, b \in \boldsymbol{R})$ 倍の行列表示 $A_z$((7)式)の行列式は $a^2 + b^2 \geqq 0$ である．これも $z$ 倍による拡大率が $\sqrt{a^2+b^2} = |z|$ であること，および $z$ 倍 $(z \neq 0)$ が平面を裏返さないことに対応している．

**オ）　対角行列** $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ は，$a, b \in \boldsymbol{R}$ なら座標平面を横に $a$ 倍，縦に $b$ 倍する1次変換を定め，行列式は $ab$ である．$ab < 0$ なら平面を裏返すが，$a < 0$, $b < 0$ なら $ab > 0$ であり，(ともに $-1$ のときを考えるとわかるように)$(-1)$倍$(= 180°$ 回転)と拡大の合成であり向きを変えない．　□

**問**　乗法性 $|AB| = |A||B|$((18)式)を示せ．

## 2.6　行列式が0のとき

行列式が0のとき逆行列がない事情も，改めて(幾何的に)調べておこう．行列 $A$ の逆行列は，連立方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ の解 $\boldsymbol{v}$ を与える：$\boldsymbol{v} = A^{-1}\boldsymbol{w}$．解 $\boldsymbol{v}$ は，「点 $\boldsymbol{w}$ は $A$ がどこから運んできたか」という意味をもつ点であ

る．これが各 $\boldsymbol{w}$ について1つに定まるためには，異なる点 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'$ が異なる点 $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}'$ にうつる必要がある．同じ $\boldsymbol{w}$ にうつると，$\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{v}$ からきたとも $\boldsymbol{v}'$ からきたとも言えて，解 $\boldsymbol{v}$ が1つにきまらない．

したがって行列式 = 面積比が0だと，平面がつぶれて困りそうである．$A=O$ は平面全体を原点につぶし，逆写像を作るのにたしかに困るので，$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq O$ で行列式が0のときを考える．$ad=bc$ より，(どれでも同じなので)たとえば $a \neq 0$ とすると，$b=ka$ として $A=\begin{bmatrix} a & ka \\ c & kc \end{bmatrix}$．すると $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} k \\ -1 \end{bmatrix} \neq 0$ が $A\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ と「つぶれ」，点 $\boldsymbol{v}$ を通る直線 $\boldsymbol{v}+t\boldsymbol{u}$ $(t \in \boldsymbol{R})$ は $A$ により1点 $A\boldsymbol{v}$ につぶれる．これでは逆写像は作れない．また $\boldsymbol{v}$ が平面全体を動いても，$A\boldsymbol{v}$ の全体は方向ベクトルが $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ の原点を通る直線にしかならない．この直線の上の点 $\boldsymbol{w}$ に対してのみ $A\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}$ の解 $\boldsymbol{v}$ が(つぶれる分だけ，つまり $\boldsymbol{v}+t\boldsymbol{u}$ の $t$ の分だけ無数に)あることになる．

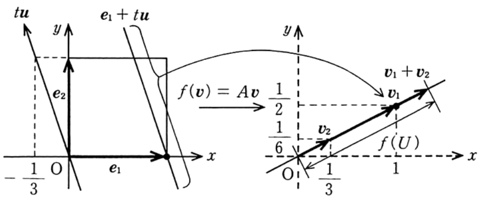



図4　det $A=0$ のとき $\left(A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}=[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]\right.$ の例$\left.\right)$

行列式が0なら(複素行列でも)，このように「つぶれるベクトル」がある．定理の形にしておこう．

**定理3**　2次行列 $A=[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ の行列式が $0 \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ ベクトル $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ で $A\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ をみたすものがある．

**証明**　複素数でも計算は同じなので，すでに上の議論で「右向き」(⇒)はわかっている．「左向き」(⇐)は，$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$ として言いかえれば

「少くとも一方は0でない数 $k, l$ があって，$k\boldsymbol{v}_1 + l\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ である」が仮定である．すると $l \neq 0$ なら $A = \left[\boldsymbol{v}_1, -\dfrac{k}{l}\boldsymbol{v}_1\right]$ と書けて，この行列式は0．$k \neq 0$ でも同様．　□(証明終)

**問**　2次行列 $A$ について次の同値を示せ：

$$|A| \neq 0 \Longleftrightarrow A \text{ 倍写像}(f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x})\text{が単射}$$
$$\Longleftrightarrow A \text{ 倍写像が全射}.$$

## 道案内

1)　複素数になじみのない方は付録1(あるいは1章であげた『新入生のための数学序説』)などを参照．付録では一般に数の体系のもつべき性質(公理)についても述べた．なお，主として工学においては $i$ で電流を表すために虚数単位を $j$ で表すことも多い．

2)　1変数関数 $f(x)$ の積分の変数変換

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t))\frac{dx}{dt}dt$$

$(x = x(t)\,;\, x_0 = x(t_0),\ x_1 = x(t_1))$ に対応して，2変数関数 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2)$ において次が成り立つことを解析の講義で学ぶであろう：変数変換 $x_1 = x_1(t_1, t_2)$，$x_2 = x_1(t_1, t_2)$ $(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ と書こう$)$ をすると

$$\int_{\boldsymbol{x}(D)} f(\boldsymbol{x})\,dx_1 dx_2 = \int_D f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})) \begin{vmatrix} \partial_1 x_1 & \partial_1 x_2 \\ \partial_2 x_1 & \partial_2 x_2 \end{vmatrix} dt_1 dt_2.$$

ただし $\partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial t_1}$ は $t_1$ による偏微分を表し，$D$ および $\boldsymbol{x}(D)$ は積分する領域を表す．1変数のときと同様に，2変数の積分はひろがりをもった平面の領域における「たしあげ」であり，変数変換すると積分範囲の各点で伸縮(や裏返し)がおきる．この伸縮率(裏返しも考えた面積比)を表すのが右辺にある行列式で，**ヤコビアン**(「ヤコビの行列式」の意)とよばれる(高木貞治『解析概論』8章§96参照)．

## 練習問題

**2-1**　逆行列があれば求めよ．(i)　$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$　　(ii)　$A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \cos\beta\\ \sin\alpha & \sin\beta\end{bmatrix}$

**2-2**　基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を2辺とする単位正方形を $U$ とする．前問の $A$ による $U$ の像 $A(U):=\{A\boldsymbol{u}\,|\,\boldsymbol{u}\in U\}$ をそれぞれ図示し，その面積を求めよ．

**2-3**　(i)　2次行列 $A=[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ の行列式を $|\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}|$ と書くとき，次を示せ：

$$|\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}|=-|\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}|,\qquad |k\boldsymbol{v}+k'\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}|=k|\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}|+k'|\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}|.$$

(ii)　成分がすべて実数のとき，上の2つの式の図形的意味を考えよ．

**2-4**　(i)　次のような行列 $A$ を求めよ．

ア)　$A$ は $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ をそれぞれ $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ にうつす．

イ)　$A$ は $\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$ をそれぞれ $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ にうつす．

(ii)　(i)のそれぞれの $A$ について，単位正方形の像の面積と行列式とを求めよ．

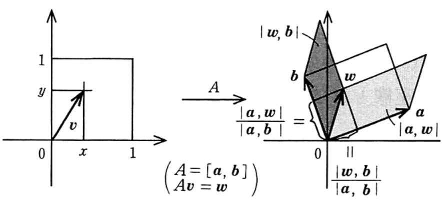
**2-5**　次のような1次変換を表す行列 $A$ を(あればすべて)求めよ：

(i)　$A$ は $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ を，それぞれ $\begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$ にうつす．

(ii)　実数 $k$ を固定する．$A$ 倍は $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}k\\2-k\end{bmatrix}$ をそれぞれ基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ にうつす．

(iii)　$A$ による線型写像で，直線 $l：y=2x+1$ が $l$ 自身にうつる．

**2-6**　次の図を見て，クラメルの公式(16)の意味を説明せよ．



# 3章：2次正方行列の対角化

行列あるいは1次変換を扱う上で，その変換ごとにふさわしい座標系をとることが基本的である．2次行列の場合にその考え方を体得しよう．

## 3.1　座標系のとりかえ

前章では実2次正方行列の定める1次変換に関係して，行列式などの幾何的な意味を考えた．行列式には1次変換の面積比という意味がある．行列式が0でないことが逆行列をもつことと同値だが，これも(実行列なら)平面がつぶれずに変換される結果その1次変換に逆写像が定まる，という意味をもつ．

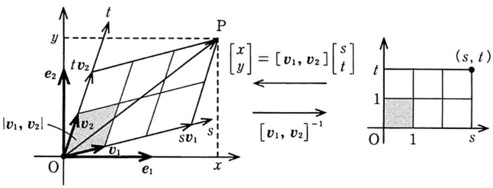



図1　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が定める座標系と，点Pの新しい座標$(s, t)$

実2次正方行列 $A=[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ の行列式 $|A|=|\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2|$ が0でないとしよう(図1)．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は平行四辺形を定め，これをしきつめて平面 $\boldsymbol{R}^2$ にひとつの座標系が定まる．点の位置を特定するためのデータ(数の組)が座標であるが，原点Oを固定した上で，一般の点Pの位置ベクトルを

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 \tag{1}$$

と表す係数の組$(s, t)$をPの新しい座標と考えるわけである．これを $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ で定まるPの座標とよぼう．

---

平面には極座標など，一般に2つの曲線族からなるいろんな座標系が考えられる．(1)の座標系は $xy$ 座標系と1次式で結ばれ，軸は直線だが必ずしも直交しないので斜交座標系ともよぶ．

---

(1)の形の和を，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の**1次結合**(linear combination)とよぶ．また，

座標系を定める資格のあるベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を**基底**とよぶ．すなわち

**定義 2**　2つの2成分実ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が $\boldsymbol{R}^2$ の**基底**をなすとは，すべてのベクトルが $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の1次結合(1)で一通りに書けることをいう．これは

$$s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 = 0 \quad \text{なら，} \quad s = t = 0 \tag{2}$$

と同値で，また $|\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2| \neq 0$ とも同値である．

**注**　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の1次結合で任意のベクトルを表すとき，表しかたが一通りでないと，座標が一通りでなく困る．つまり

$$\boldsymbol{v} = s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 = s'\boldsymbol{v}_1 + t'\boldsymbol{v}_2 \quad \text{ならば} \quad s = s',\ t = t' \quad \text{か？}$$

が問題．この条件を $(s-s')\boldsymbol{v}_1 + (t-t')\boldsymbol{v}_2 = 0$ と移項したのが(2)である．(2)と $|\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2| \neq 0$ (面積0でない平行四辺形を定める)との同値は定理3にほかならない．なお，数の範囲を拡げて考えれば，定義はそのまま複素ベクトルでも通用する．□

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ が，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を基底とする座標系では(1)で表されるとしよう．(1)は右辺を書きかえ，次のように見ると便利である(図1)．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \left( = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \tag{3}$$

これより(2)が $|\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2| \neq 0$ と同値なことも見やすい．また逆行列をかければ

$$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \tag{4}$$

を得る．(4)が新しい座標を与える**座標変換の公式**である．

**例 1**　基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を角 $\theta$ だけ回転して得られるベクトルを $\boldsymbol{e}_1(\theta), \boldsymbol{e}_2(\theta)$ とし，これらを使って新しい座標を定める．$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ である点Pの新しい座標を $x_\theta$，$y_\theta$ と書くことにすれば，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [\boldsymbol{e}_1(\theta), \boldsymbol{e}_2(\theta)] \begin{bmatrix} x_\theta \\ y_\theta \end{bmatrix}$$

である((3)式)．$[\boldsymbol{e}_1(\theta), \boldsymbol{e}_2(\theta)] = R(\theta)$ は回転行列だから，その逆行列は

「逆回転」で与えられ，

$$\begin{bmatrix} x_\theta \\ y_\theta \end{bmatrix} = R(-\theta)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

つまり，点をとめて座標系を回転するとき，新しい座標は逆回転で得られる(図2)．この関係を一般に表すのが(4)である．

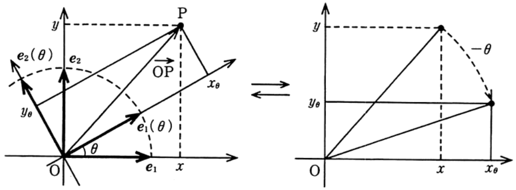



図2　$(e_1(\theta), e_2(\theta)) = R(\theta)$ で定まる座標系．新しい座標 $x_\theta, y_\theta$ は，元の座標 $x, y$ から $R(\theta)^{-1}$ 倍(逆回転)で得られる．

**問**　(i)　次のベクトルの組は $\boldsymbol{R}^2$ の基底か？

ア)　$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$　　イ)　$\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$

(ii)　基底 $e_1\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，$e_2\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ に関する次の点の座標を求めよ：

ア)　P(1, 0)，　　イ)　Q(−1, 1)．

## 3.2　直線に関する折り返し

座標系をとりかえて考えるのが自然な例として，原点を通る直線についての折り返し(線対称変換)を表す行列を求めてみよう．直線 $l$ を $y = x\tan\theta$ とし，$v_1$ を $l$ の方向ベクトル，$v_2$ をこれと直交する**法線ベクトル**としよう(p 44，図3左)．$l$ についての折り返しとは

$$v_1 \text{ をそのまま(1倍)に，} v_2 \text{ を } -1 \text{ 倍にする} \tag{5}$$

という合同変換 $f$ である．$f$ は平行四辺形を平行四辺形にうつすから1次変換で，これを $f(v) = Av$ と表す $A$ を求めるのが問題である．

方向ベクトル $v_1$，法線ベクトル $v_2$ は

$$v_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = e_1(\theta), \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = e_2(\theta)$$

にとれて，これらは基底をなす．(5)を式で書けば

$$f(\boldsymbol{v}_1)=\boldsymbol{v}_1,\qquad f(\boldsymbol{v}_2)=-\boldsymbol{v}_2 \tag{6}$$

であるが，これで一般のベクトルの像は

$$f(s\boldsymbol{v}_1+t\boldsymbol{v}_2)=sf(\boldsymbol{v}_1)+tf(\boldsymbol{v}_2)=s\boldsymbol{v}_1-t\boldsymbol{v}_2$$

ときまる．つまり $f$ は(6)で完全にきまっている．$f(\boldsymbol{v})=A\boldsymbol{v}$ とすれば，条件(6)は

$$A\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_1,\qquad A\boldsymbol{v}_2=-\boldsymbol{v}_2$$

まとめて

$$A[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]=[\boldsymbol{v}_1,-\boldsymbol{v}_2]$$

と書ける．そこで $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]^{-1}=R(-\theta)$ を掛ければ $A$ が得られる：

$$\begin{aligned}A&=[\boldsymbol{v}_1,-\boldsymbol{v}_2][\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]^{-1}\\&=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta&2\sin\theta\cos\theta\\2\sin\theta\cos\theta&\sin^2\theta-\cos^2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos2\theta&\sin2\theta\\\sin2\theta&-\cos2\theta\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{7}$$

折り返しは向きをかえる(平面を裏返す)が，この行列式は $-1$ でたしかに負である．($|A|=-\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta=-1.$)

また $\theta=0$ とすると $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ となり，これはたしかに $x\mapsto x$, $y\mapsto -y$ という，$x$ 軸 $l$：$y=0$ についての折り返しを表している．

軸についての折り返しはこのように簡単だが，そもそも平面に座標をとるのは人間の勝手で，どの直線についても折り返しは簡単なはずである．そう思って(7)を観察すると，$[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]$ は回転行列 $R(\theta)$ であり，$A$ は

$$A=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]^{-1}=R(\theta)\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}R(-\theta)$$

と，「回す・折り返す・回す」に分解できる．つまり $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]^{-1}=R(-\theta)$ をかけて $x, y$ 座標から $x_\theta, y_\theta$ 座標へうつり，新しい座標で第2成分 $y_\theta$ を $-1$ 倍して「折り返し」，また元の座標に $R(\theta)$ 倍でうつると，$A$ が得られる．これらの合成が $l$ についての折り返しであることは，図3のような「思考実験」で確認できるだろう．

**問**　$A$ を直線 $y=x\tan\theta$ に関する折り返し，$B$ を $x$ 軸に関する折り

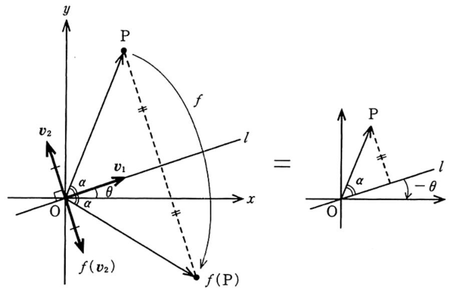



図3　直線 $l: y = x\tan\theta$ に関する折り返しとその分解

返しを表す行列とする．$AB$ と $BA$ はそれぞれどんな変換を表すか．

## 3.3　2次曲線の概形をしらべる問題

$x$ と $y$ の2次式

$$3x^2-2xy+3y^2=1 \tag{8}$$

が定める，$xy$ 平面の2次曲線 $C$ を考えよう．これは

$$(x+y)^2+2(x-y)^2=1 \tag{9}$$

と書け，さらに $X=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$，$Y=\dfrac{-x+y}{\sqrt{2}}$ とすれば

$$2X^2+4Y^2=1. \tag{10}$$

つまり新しい $XY$ 座標でみることで，曲線 $C$ が楕円であるとわかる．$X$ 軸($Y=0$)，$Y$ 軸($X=0$)は互いに直交し，また $X, Y$ を定めるのに $\sqrt{2}$ でわったので，$(X, Y)=(1,0), (0,1)$ が表す2点の原点からの距離は1．つまりスケール(縮尺)も $xy$ 座標と同じである．

この座標変換を行列で書けば

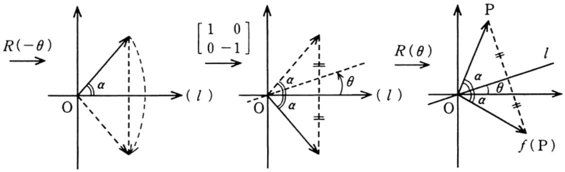
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{11}$$

である．つまり((3)または(4)と比べると)，$X$ と $Y$ は

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_1\left(\frac{\pi}{4}\right), \qquad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_2\left(\frac{\pi}{4}\right) \tag{12}$$

を基底とする座標で，この座標系は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を基底とする $xy$ 座標を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転したものである(そのために，$Y$ を $\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$ でなく $\dfrac{-x+y}{\sqrt{2}}$ にした：図4)．

さらに，(8)も




$$[x, y]\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \tag{13}$$

と書け，これが2次曲線と行列を結ぶポイントである．$C$ の $XY$ 座標での表示を得るには，これに(11)を代入すればよい．横ベクトル $[x, y]$ を $[X, Y]$ で書くと(次ページ注参照)

$$[x, y] = [X, Y]\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{11'}$$

であるから，(8)から(10)への変形を行列でやると

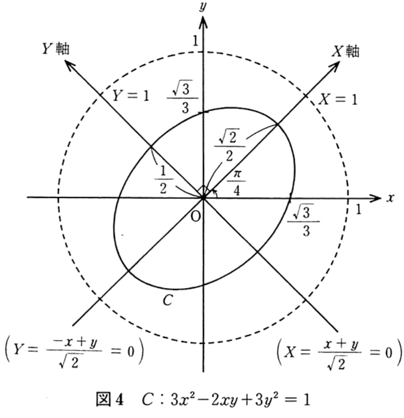



図4　$C: 3x^2-2xy+3y^2=1$

$$[X,\ Y]\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$
$$= [X,\ Y]\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$
$$= [X,\ Y]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 2X^2+4Y^2 \tag{14}$$

となる．このように(13)の行列を対角行列に変形することが，2次曲線(8)の表示を標準形(10)にすることといえる．

---

**注**　一般に $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $(X = ax+by,\ \ Y = cx+dy)$を横ベクトルで表すと，$[X,\ Y] = [x,\ y]\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$($b$ と $c$ が入れかわる)．これが関係式の書きかえ(11) ↔ (11′)を与える．

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対し，${}^tA = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ と書き($A$ の**転置行列** transposed matrix)，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ に対しても ${}^t\boldsymbol{v} = [x,\ y]$ と書くと，上の事実は ${}^t(A\boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{v}\,{}^tA$ と表せる．

${}^tA$ は $A^T$ とも書く．$A = {}^tA$ である行列を**対称行列**という．(8)を(13)のように書くとき，$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ などでなく対称な $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ に選ぶと，変数変換しても対称なままであるなど都合がよい．

---

**問**　$A, B$ を2次行列とする．${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ を示せ．

## 3.4　固有ベクトルと対角化

以上のように，それぞれの行列に「固有の方向」を座標系に使うことで，問題がわかりやすくなることが多い．直線に関する折り返しのときの方向ベクトルや法線ベクトルのように，行列 $A$ で方向が変わらないベクトルが $A$ の「固有の方向」である．

**定義 3**　$A$ を正方行列とする．ある数 $\lambda$(ラムダ) に対して

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

をみたす $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ があるとき，$\lambda$ を $A$ の**固有値**という．また $\boldsymbol{v}$ を($A$ の)**固有値 $\lambda$ の固有ベクトル**という．　□

直線に関する折り返しのように，あらかじめ行列で与えられていない1次変換 $f$ についても，$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ が $f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$ を満たせば，$\lambda$ を $f$ の固有値，$\boldsymbol{v}$ を $f$ の固有ベクトルとよぶ．

**例2　ア)**　原点を通る直線 $l$ に関する平面の折り返し写像 $f$(を表す行列 $A$)について，$l$ の方向ベクトルは $f$ の($A$ の)固有値1の固有ベクトル，法線ベクトルは固有値 $-1$ の固有ベクトルである((6)式)．このように固有ベクトルは方向が大事で，長さは(1にとることも多いが)とりあえず0でなければよい．

**イ)**　曲線 $3x^2-2xy+3y^2=1$ を調べるのに用いた

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

について

$$B\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{v}_1, \qquad B\boldsymbol{v}_2 = 4\boldsymbol{v}_2$$

であり，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は $B$ の固有ベクトルである．

**ウ)**　単位行列については，$\boldsymbol{0}$ でないベクトルはすべて固有値1の固有ベクトルである．　□

一般の2次行列 $A$ でこのような固有ベクトルが2方向あったとして，それらを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ とする．それぞれの固有値を $\lambda, \mu$ とすれば

$$A\boldsymbol{v}_1 = \lambda\boldsymbol{v}_1, \qquad A\boldsymbol{v}_2 = \mu\boldsymbol{v}_2 \tag{15}$$

である．2方向とはもちろん基底になるという意味で，$|\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2| \neq 0$．このとき任意のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は

$$\boldsymbol{v} = s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \tag{16}$$

と1通りに書ける．そして(15)と(16)より，新しい $st$ 座標では $A$ の作用は単に $s$ を $\lambda$ 倍，$t$ を $\mu$ 倍するだけである：

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{v} &= A(s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2) = sA\boldsymbol{v}_1 + tA\boldsymbol{v}_2 \\ &= \lambda s\boldsymbol{v}_1 + \mu t\boldsymbol{v}_2. \end{aligned}$$

これは $A[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]\begin{bmatrix} \lambda s \\ \mu t \end{bmatrix}$ と書け，さらに右辺を書き直せば

$$A[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}.$$

よって($s, t$ は任意だから)

$$A[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{17}$$

である．仮定より $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]^{-1}$ があるので左からかけ，結局次が得られる．

$$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]^{-1}A[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{18}$$

(18)の右辺は(したがって左辺も)，$xy$ 座標で $A$ 倍だった1次変換を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を基底とする $st$ 座標で表す行列である($(s, t) \mapsto (\lambda s, \mu t)$)．

一般にも，$A$ が表す1次変換を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ を基底とする座標でみると，$A$ が $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]^{-1}A[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ に変換される．$A$ を可逆行列 $P$ で「はさんで」$P^{-1}AP$ を対角行列にすることを $A$ の**対角化**というが，固有ベクトルを並べた $P = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ を**とれれば** $A$ は自然に対角化されるわけである((17), (18))．

---

**注**　以上は $st$ 座標での $A$ の表示を求めるという動機で(17)に至る式変形を行った．わかってしまえば，(15)を並べて

$$[A\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2] = [\lambda\boldsymbol{v}_1, \mu\boldsymbol{v}_2]$$

と書き，これを

$$A[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = [\lambda\boldsymbol{v}_1, \mu\boldsymbol{v}_2] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

と書いたのが(17)．$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]^{-1}$ を掛けて対角化(18)を得る．

---

**問**　例2の $B$ を，$P = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ を用いて対角化せよ．(すなわち，$P^{-1}BP$ が対角行列となることを確かめよ．)

## 3.5　固有方程式と固有ベクトル

固有ベクトルを求める方法を考えよう．$\boldsymbol{v}$ が固有ベクトルであるという式 $A\boldsymbol{v} - \lambda\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ は，$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とすれば

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\boldsymbol{v} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{19}$$

である．固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ は(方向を表すために) $\boldsymbol{0}$ であってはならないが，

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \tag{20}$$

が逆行列を持てば，(19)に左からかけると $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$．よって固有値 $\lambda$ の固有ベクトルがあるためには，(20)の行列式は0でなくてはならない：

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=(a-\lambda)(d-\lambda)-bc$$
$$=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0. \tag{21}$$

これが固有値 $\lambda$ がみたすべき方程式で，$A$ の**固有方程式**とよぶ．なお，(21)における $-\lambda$ の係数 $a+d$ を $A$ の**トレース**とよび，$\mathrm{tr}A$ と書く．

以下複素数の範囲で考えれば，方程式(21)は必ず解 $\lambda$ をもつ．これが固有値の候補だが，行列式0の行列は必ずある方向 $\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ を「消す」：

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$$

(2章定理3参照)．これは $A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$ にほかならない．つまり固有方程式のひとつの解から，固有値と固有ベクトルがひとつ(1方向)得られる．

2次方程式(21)の2解を $\lambda, \mu$ とし，$\lambda\neq\mu$ とすれば，それぞれから固有ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ ができる．(18)の要領で $A$ を対角化するには $|\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}|=\det[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]\neq 0$ かどうかが問題だが，$\lambda\neq\mu$ ならば自動的に正しい：

**定理4**　2次行列 $A$ の固有ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ $(\neq\boldsymbol{0})$ について，これらの固有値 $\lambda, \mu$ が異なれば，$|\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}|\neq 0$．

**証明**　問題の行列式が0とする．すると $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ は平行で(2章定理3)，ある数 $a$ があって $a\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}$．この式に $A$ を掛けると $\lambda a\boldsymbol{v}=\mu\boldsymbol{w}$ となる．$a\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}\neq 0$ なので $\lambda=\mu$ となり，仮定に反する．　□

したがって2次正方行列は，固有方程式が重根をもたない限り必ず対角化できる．重根の場合はあらためて4章で考えよう．固有方程式の解が実数かどうかも問題によっては大事で，一般には固有ベクトルも複素ベクトルになりうる．しかし平面に結果を図示できないだけで計算は同じなので，とりあえず気にしないことにしよう．

**問**　$B=\begin{bmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求め，$B$ を対角化せよ．

## 3.6　対角化の例

（1）　複素数 $z=a+bi$ の行列表示 $A_z=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ $(a, b\in \boldsymbol{R})$ を考える(§2.3)．$(a-\lambda)^2+b^2=0$ より，固有値は $\lambda=a\pm bi=z, \bar{z}$ である．それぞれを固有値とする固有ベクトルも $\boldsymbol{v}_{\pm}=\begin{bmatrix} 1 \\ \mp i \end{bmatrix}$(複号同順)で，複素ベクトルである．$A_z[\boldsymbol{v}_+, \boldsymbol{v}_-]=[\boldsymbol{v}_+, \boldsymbol{v}_-]\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{bmatrix}$ であり，$|\,\boldsymbol{v}_+, \boldsymbol{v}_-\,|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{vmatrix}=2i\neq 0$．したがって

$$A_z=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}^{-1}.$$

ふたつの複素数 $z, z'$ に対する $A_z, A_{z'}$ について $A_zA_{z'}=A_{zz'}$(積が積に対応する)であったが，これは

$$\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z' & 0 \\ 0 & \overline{z'} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} zz' & 0 \\ 0 & \overline{zz'} \end{bmatrix}$$

を「座標をかえて」みたものということができる．

（2）　実対称行列 $B=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ $(a, b, c\in \boldsymbol{R})$ は必ずある回転行列 $R(\theta)$ で対角化でき，固有値は実数である(練習問題3-3，5章定理6)．したがって，$3x^2-2xy+3y^2=1$ の例と同様に，2次曲線 $[x, y]\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=k$ は回転により必ず標準形 $\lambda X^2+\mu Y^2=k$ に変換される．

**例3**　2次曲線 $x^2+6\sqrt{3}\,xy-5y^2=k$ を調べる．

$$[x, y]\begin{bmatrix} 1 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=k \quad \left(B=\begin{bmatrix} 1 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -5 \end{bmatrix}\text{とおこう}\right)$$

と書ける．$|\,B-\lambda\,|=\lambda^2+4\lambda-32=(\lambda-4)(\lambda+8)$ より固有値は $4, -8$．$\boldsymbol{v}_1=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ がそれぞれ固有値 $4, -8$ の固有ベクトルである．これらを長さ1にとったおかげで

$$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}=R\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

であり

$$\begin{bmatrix} 1 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -5 \end{bmatrix} = R\left(\frac{\pi}{6}\right)\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}R\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

となる．よって $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = R\left(-\frac{\pi}{6}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ により，

$$k = [X,\ Y]\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 4X^2-8Y^2.$$

よってこの2次曲線は，$xy$ 座標を $\frac{\pi}{6}$ 回転した $XY$ 座標で見れば，$k=0$ なら交わる2直線 $Y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}X$，$k\neq 0$ ならこれらを漸近線とする双曲線である．

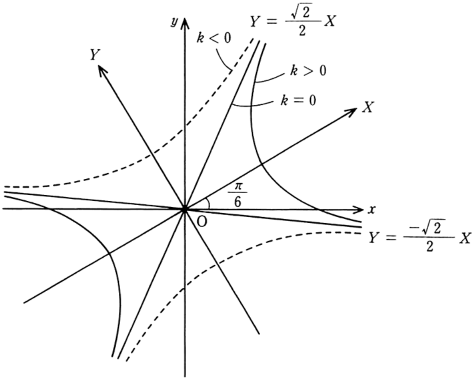



**図5**　$x^2+6\sqrt{3}xy-5y^2=k$

---

**注**　上で $[\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2]=R\left(\frac{\pi}{6}\right)$ のかわりに $[\boldsymbol{v}_2,\ -\boldsymbol{v}_1]=R\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ をとっても $B$ は対角化される．これは $X$ 方向と $-Y$ 方向を入れ換えることになるが，軸のよび名が変わるだけで同じ概形が結論されるのは言うまでもない．$[\boldsymbol{v}_1,\ -\boldsymbol{v}_2]$ をとった場合も $Y$ 軸の正負の向きが入れ換わるだけで同様である．

---

**問**　2次曲線 $5x^2-2\sqrt{3}xy+7y^2=4$ の概形を調べよ．

## 道案内

本章の議論には応用上典型的な内容が多く含まれるので，十分理解されたい．

2次式で定まる図形の概形は多変数関数の極値問題などでも基本的である．これについては5章の前半で説明しよう．

問題ごとに都合の良い(本質的な)座標系をとる対角化は，第2部・第3部でもくりかえしとりあげる．一般的に言って，折り返しを表す行列を求めたときのような「簡単なものに分解する」考え方は，汎用性のあるアイデアであろう．

人間のすることは「こわすこと」と「まとめること」のどちらかだ，という話もある．(これを「分解と合成」というともっともらしい．) やがて「空間そのもの」をこわしたりまとめたりするための数学的道具も登場するが，これはまた先の話(17章)．

## 練習問題

**3-1**　$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ を対角化せよ．また $A^n$ を求めよ．

**3-2**　$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ のトレースを $\mathrm{tr}A=a+d$ で定めた(§3.5)．$\mathrm{tr}AB=\mathrm{tr}BA$, $\mathrm{tr}BAB^{-1}=\mathrm{tr}A$ ($|B|\neq 0$ のとき)を示せ．

**3-3**　対称行列 $B=\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}$ ($a, b, c$ は実数)と回転行列 $R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ について，$\theta$ を適当にとれば $R(-\theta)BR(\theta)$ が必ず対角行列になることを示せ．

**3-4**　${}^tTT=E$ をみたす(実)正方行列を直交行列という．$T$ は2次行列としよう．

(i)　$T=[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ と書けば，この条件は $|\boldsymbol{v}_j|=1$ かつ $\boldsymbol{v}_1\perp\boldsymbol{v}_2$ と同値であることを確かめよ．また $|T|=\pm 1$ であることを示せ．

(ii)　$A=\begin{bmatrix}-1/6 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ を対角化する直交行列 $T$ を(あれば)すべて求めよ．

**3-5**　楕円 $3x^2+y^2=1$ を正の向きに $\pi/6$ ラジアン回転して得られる楕円の方程式を $[x, y]\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=1$ と表すとき，$a, b, c$ を求めよ．

**3-6**　次の2次曲線の概形を描け．［ヒント：(ii)では平行移動も考える］

(i)　$x^2+10\sqrt{3}\,xy+11y^2=8$　　(ii)　$5x^2-6xy+5y^2-8\sqrt{5}\,(x-y)+16=0$

# 4章：2次正方行列の対角化(2)

前章では斜行座標への座標変換と2次行列の対角化を扱った．複素数の範囲で考えれば，固有方程式が重根をもたない限り対角化できる．では重根のときは？　という問いがあるが，本章ではこれを中心に考えよう．

## 4.1　行列の n 乗と線型漸化式

行列 $A$ の固有ベクトル $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ は $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ をみたすものだが，$A$ を1回掛けて $\lambda$ 倍になれば，$n$ 回掛ければ当然 $\lambda^n$ 倍になる($A^n\boldsymbol{v} = \lambda^n\boldsymbol{v}$)．$\boldsymbol{w}$ を固有値 $\mu$ の固有ベクトルとすれば，$A^n\boldsymbol{w} = \mu^n\boldsymbol{w}$ でもあるので

$$A^n[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = [\lambda^n\boldsymbol{v}, \mu^n\boldsymbol{w}] = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]\begin{bmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

つまり $P = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ により $A^nP = P\begin{bmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{bmatrix}$．$\lambda \neq \mu$ なら $P = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ は逆をもつ(定理4)から，$P^{-1}$ を右から掛け次が得られる．

$$A^n = P\begin{bmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{bmatrix}P^{-1}. \qquad (2)$$

---

いいかえれば，$A = P\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}P^{-1}$ のとき

$$A^n = \left(P\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}P^{-1}\right)\cdots\left(P\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}P^{-1}\right)$$

($n$ 回)だが，途中の $P^{-1}$ と $P$ はすべて消しあって

$$A^n = P\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}^n P^{-1} = P\begin{bmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{bmatrix}P^{-1}.$$

---

$P$ は $n$ によらないので，$\lambda \neq \mu$ のときの $A^n$ の行列成分は固有値の $n$ 乗の和 $k\lambda^n + l\mu^n$ の形になる(もちろん，係数 $k, l$ は成分ごとに違う)．このことは，次の数列の問題にも直接反映する．

$$x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} \qquad (3)$$

できまる数列の一般項を考える．これは $x_{n+1}, x_n, x_{n-1}$ の(**隣接3項**の)1次の関係式で $x_{n+1}$ をきめる式(**線型漸化式**)だが，行列とベクトルで

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad \left( A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{bmatrix} \text{とおこう} \right) \tag{4}$$

とも書ける(同値)：第2成分をみれば(3)そのもの．左辺を $\boldsymbol{v}_n$ と書けば

$$\boldsymbol{v}_n = A\boldsymbol{v}_{n-1} = A^2\boldsymbol{v}_{n-2} = \cdots = A^n\boldsymbol{v}_0$$

なので$A^n$が計算できればよい．$A$を対角化するため固有方程式を書くと

$$|A-\lambda| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a\lambda - b = 0. \tag{5}$$

(5)が重根でないと仮定し，根$\dfrac{1}{2}(a\pm\sqrt{a^2+4b})$を$\lambda_\pm$と書こう．

$$\begin{bmatrix} -\lambda_\pm & 1 \\ b & a-\lambda_\pm \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

は$x : y = 1 : \lambda_\pm$でみたされ，$\boldsymbol{v}_\pm = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_\pm \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$が固有ベクトルを与える．$\lambda_+ \neq \lambda_-$ならばたしかに$|\boldsymbol{v}_+, \boldsymbol{v}_-| = \lambda_- - \lambda_+ \neq 0$．$P = [\boldsymbol{v}_+, \boldsymbol{v}_-]$とすれば

$$A^n = P \begin{bmatrix} \lambda_+^n & 0 \\ 0 & \lambda_-^n \end{bmatrix} P^{-1} \tag{6}$$

$$= \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_+^n & 0 \\ 0 & \lambda_-^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_- & -1 \\ -\lambda_+ & 1 \end{bmatrix},$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{v}_n = A^n \boldsymbol{v}_0$$

$$= \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{bmatrix} \lambda_+^n\lambda_- - \lambda_+\lambda_-^n & \lambda_-^n - \lambda_+^n \\ \lambda_+^{n+1}\lambda_- - \lambda_+\lambda_-^{n+1} & \lambda_-^{n+1} - \lambda_+^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

となる．この第1成分を見れば，求める一般項は次で与えられる：

$$x_n = \frac{(\lambda_+^n\lambda_- - \lambda_+\lambda_-^n)x_0 + (\lambda_-^n - \lambda_+^n)x_1}{\lambda_- - \lambda_+}$$

$$= \frac{\lambda_- x_0 - x_1}{\lambda_- - \lambda_+}\lambda_+^n + \frac{\lambda_+ x_0 - x_1}{\lambda_+ - \lambda_-}\lambda_-^n. \tag{7}$$

数列$\{\lambda_+^n\}, \{\lambda_-^n\}$は(3)をみたし($\because$(5))，初期条件$x_0, x_1$が何でも，一般項がこれらの和(1次結合)で表された．いささかオオゲサだが，このことを「2つの数列$\{\lambda_+^n\}, \{\lambda_-^n\}$は漸化式(3)の**基本解系**をなす」とも表す．

平面における基底とは，その1次結合ですべてのベクトルが一通りに表せるベクトルの組だった．漸化式(3)は1次式の条件であり，$\{x_n\}, \{x'_n\}$がともに(3)の解なら，$\{kx_n + k'x'_n\}$もやはり解になる．(3)の「解全体」において基底の役割をするのが基本解系で，今はそれを2つの等比数列$\{\lambda_\pm^n\}$として(固有方程式を解いて)得たわけである．

**注**　(5)は $\lambda^2 = a\lambda + b$ と書け，$x_n = \lambda^n$ が(3)をみたすための条件である．

対角化による上の解法は(4)の代りに $P^{-1}\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\lambda_- - \lambda_+}\begin{bmatrix} \lambda_- x_n - x_{n+1} \\ -\lambda_+ x_n + x_{n+1} \end{bmatrix}$ の漸化式を考えることと言え，$A = P\begin{bmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{bmatrix}P^{-1}$ より

$$(4) \iff \begin{bmatrix} \lambda_- x_n - x_{n+1} \\ -\lambda_+ x_n + x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_+(\lambda_- x_{n-1} - x_n) \\ \lambda_-(-\lambda_+ x_{n-1} + x_n) \end{bmatrix}$$

つまり(3)を $\lambda_- x_n - x_{n+1} = \lambda_+(\lambda_- x_{n-1} - x_n)$ と書き換える解法と同値である．解と係数の関係 $(\lambda_+ + \lambda_- = a,\ \lambda_+\lambda_- = -b)$ から再び(5)を得る．

---

**例1**　次で定まる，いわゆる「フィボナッチ数列」[1] を考える：

$$x_0 = x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

固有方程式 $\lambda^2 = \lambda + 1$ の解は $\lambda_\pm = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$．一般項は，上の考察により

$$x_n = k\lambda_+^n + l\lambda_-^n = k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + l\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

の形だが，$x_0 = x_1 = 1$ より $k + l = k\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + l\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$．これを解くと $k = \dfrac{1+\sqrt{5}^{-1}}{2}$，$l = \dfrac{1-\sqrt{5}^{-1}}{2}$ であり，「ビネの公式」として知られる式を得る((7)参照)：

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}. \end{aligned}$$

**問**　漸化式 $x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}$ を(4)のように表し，対角化を用いて一般項を求めよ．

## 4.2　ジョルダン標準形

$A$ の固有方程式 $|A - t| = 0$ が異なる根 $t = \lambda, \mu$ を持てば，それぞれを固有値とする固有ベクトルが存在して基底となり，$A$ は対角化可能である．では，重根 $\lambda = \mu$ のときはどうだろうか？

固有値 $\lambda$ の異なる方向の固有ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ があったとすれば

$$A[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = [\lambda\boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{w}] = \lambda[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] \quad かつ \quad |\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}| \neq 0$$

だが，$[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]^{-1}$ を掛けて $A = \lambda E$．つまり $A$ はスカラー行列(単位行列の $\lambda$ 倍)で，はじめから対角型である．

そこで，異なる方向の固有ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ はないとする．重根は特別な場合なので，行列要素を少し変えれば重根でなくなるだろう．実際 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の固有方程式 $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$ が重根をもてば

$$\text{判別式} = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc = 0.$$

これは $a, b, c, d$ を適当にずらせば，$\neq 0$ にできる[2)]．

そこでパラメータ $\varepsilon$ をもつ行列 $A_\varepsilon$ を次のようにとったとしよう：

$$A_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} A \quad \text{かつ} \quad \varepsilon \neq 0 \text{ では } A_\varepsilon \text{ の固有方程式は重根でない．}$$

考えやすくするため，$A_\varepsilon$ は固有値が $\lambda, \lambda+\varepsilon$ であるようにとれたとしよう．$\mu = \lambda + \varepsilon$ とし，$\boldsymbol{v}_\lambda, \boldsymbol{v}_\mu$ を $\varepsilon \neq 0$ のときそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルとする．$\varepsilon = 0$ では $\boldsymbol{v}_\mu$ が $\boldsymbol{v}_\lambda$ に比例するようにしかとれないというのが，今考えている場合である(そうでなければ，極限でも2つの異なる方向の固有ベクトルがとれて，先ほどのスカラー行列の場合になる)．

必要ならスカラー倍を調整すれば $\varepsilon \to 0$ で両者が一致する：$\boldsymbol{v}_\mu \to \boldsymbol{v}_\lambda$ としてよい．差 $\dfrac{\boldsymbol{v}_\mu - \boldsymbol{v}_\lambda}{\mu - \lambda} = \dfrac{\boldsymbol{v}_{\lambda+\varepsilon} - \boldsymbol{v}_\lambda}{\varepsilon}$ に $A$ をかけると

$$A\left(\frac{\boldsymbol{v}_\mu - \boldsymbol{v}_\lambda}{\mu - \lambda}\right) = \frac{A\boldsymbol{v}_\mu - A\boldsymbol{v}_\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\mu \boldsymbol{v}_\mu - \lambda \boldsymbol{v}_\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$= \frac{\mu(\boldsymbol{v}_\mu - \boldsymbol{v}_\lambda) + (\mu - \lambda)\boldsymbol{v}_\lambda}{\mu - \lambda} = \mu \frac{\boldsymbol{v}_\mu - \boldsymbol{v}_\lambda}{\mu - \lambda} + \boldsymbol{v}_\lambda.$$

極限 $\varepsilon = \mu - \lambda \to 0$ $(\mu \to \lambda)$ で微分 $\dfrac{d}{d\varepsilon} \boldsymbol{v}_\mu \Big|_{\varepsilon=0}$ $(= \boldsymbol{v}'_\lambda$ と書く) があれば

$$A\boldsymbol{v}'_\lambda = \lambda \boldsymbol{v}'_\lambda + \boldsymbol{v}_\lambda$$

となる．結局，ベクトル $\boldsymbol{v}_\lambda, \boldsymbol{v}'_\lambda$ があって

$$A\boldsymbol{v}_\lambda = \lambda \boldsymbol{v}_\lambda, \qquad A\boldsymbol{v}'_\lambda = \lambda \boldsymbol{v}'_\lambda + \boldsymbol{v}_\lambda$$

となるだろう．まとめれば

$$A[\boldsymbol{v}_\lambda, \boldsymbol{v}'_\lambda] = [\lambda \boldsymbol{v}_\lambda, \lambda \boldsymbol{v}'_\lambda + \boldsymbol{v}_\lambda] = [\boldsymbol{v}_\lambda, \boldsymbol{v}'_\lambda] \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

と書ける．$P := [\boldsymbol{v}_\lambda, \boldsymbol{v}'_\lambda]$ は(じつは)可逆となり

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{8}$$

とできる．これが固有方程式が重根かつスカラー行列でない2次行列 $A$ の標準形で，**ジョルダン標準形**とよばれる．

上で $P=[\boldsymbol{v}_\lambda, \boldsymbol{v}'_\lambda]$ が逆行列をもたなければ $\boldsymbol{v}_\lambda, \boldsymbol{v}'_\lambda$ は比例し，$\boldsymbol{v}_\lambda \neq 0$ より $k\boldsymbol{v}_\lambda = \boldsymbol{v}'_\lambda$. これに $A$ をかければ(定理4で用いた方法!)

$$k\lambda\boldsymbol{v}_\lambda = \lambda\boldsymbol{v}'_\lambda + \boldsymbol{v}_\lambda \quad \therefore\ \boldsymbol{v}_\lambda = k\lambda\boldsymbol{v}_\lambda - \lambda\boldsymbol{v}'_\lambda = 0.$$

これは矛盾．なお，これより $\boldsymbol{v}'_\lambda \neq 0$ でもある． □

以上の「発見法的」考察には，$\boldsymbol{v}_{\lambda+\varepsilon}$ が微分可能のように $A_\varepsilon$ をとれるか，という詰めるべき点がある．この点を正当化することはできるが，結果を導くにははじめから代数的に扱うのが楽である．ケーリー-ハミルトンの定理に基くのだが，節を改めて説明しよう．その前に数列の漸化式で議論を確かめてみる．

**例2**　漸化式(3)で，(4)の行列が対角化できない場合．前節の計算で $\lambda_+ = \lambda_-$ だと，$P=[\boldsymbol{v}_+, \boldsymbol{v}_-] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{bmatrix}$ は逆行列をもたない．$\varepsilon \to 0$ でそのようになる例として，次のものを考えよう．

$$x_{n+1} = (\varepsilon-2)x_n + (\varepsilon-1)x_{n-1}$$

(4)の形にすると，$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon-1 & \varepsilon-2 \end{bmatrix}$. $|A-\lambda| = \lambda^2 + (2-\varepsilon)\lambda + (1-\varepsilon) = (\lambda+1)(\lambda+1-\varepsilon) = 0$ で，$-1, \varepsilon-1$ が根．対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}_{\varepsilon-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon-1 \end{bmatrix}$ ととれば，$\varepsilon \to 0$ でこれらは一致する．そこで

$$\boldsymbol{v}'_{-1} := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_{\varepsilon-1} - \boldsymbol{v}_{-1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を考えると，$P = [\boldsymbol{v}_{-1}, \boldsymbol{v}'_{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ によって

$$A[\boldsymbol{v}_{-1}, \boldsymbol{v}'_{-1}] = [\boldsymbol{v}_{-1}, \boldsymbol{v}'_{-1}]\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\therefore\ A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1}n \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= (-1)^n\begin{bmatrix} 1-n & -n \\ n & n+1 \end{bmatrix}.$$

これより，一般項 $x_n$ は

$$x_n = (-1)^n\{(1-n)x_0 - nx_1\} = (-1)^n x_0 - n(-1)^n(x_0+x_1).$$

これは(7)から $\lambda_+ \to \lambda_-(=-1)$ としても得られる．この場合，$x_n = (-1)^n$，$n(-1)^n$ の2つが基本解系をなす．

**問**　$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ が対角化できないことを示せ．また $P$ を適当にとり，$P^{-1}AP$ がジョルダン標準形を与えるようにせよ．

## 4.3 ケーリー-ハミルトンの定理とその応用

$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の固有方程式(§3.5)の左辺を $p_A$ と書こう．

$$p_A(t) = t^2-(a+d)t+(ad-bc) \tag{9}$$

これを $A$ の**特性多項式**ともよぶ．この $p_A$ に $A$ を代入するとゼロ行列になることを知っているであろう：

**定理 5 (ケーリー-ハミルトンの定理[3])**

$$p_A(A) = A^2-(a+d)A+(ad-bc)E = O. \tag{10}$$

一度はマジメに $A^2$ など計算しタシザンして，確かめておこう(問)．

以下ではこれをもとに，$p_A$ が重根をもつときをもう一度考えてみる．$\lambda$, $\mu$ を $p_A(t)=0$ の解($p_A$ の根)とすれば

$$p_A(t) = (t-\lambda)(t-\mu) \tag{11}$$

であり，(10)は次のようにも書ける．

$$(A-\lambda E)(A-\mu E) = O \tag{12}$$

よって重根の場合は

$$(A-\lambda E)^2 = O \tag{13}$$

が成り立つことになる．いま $A-\lambda E=O$ なら $A$ ははじめからスカラー行列だから，$A-\lambda E \neq O$ としよう．

どんな $A$ も，1つは固有ベクトル $\boldsymbol{v} \neq 0$ をもつ(§3.5と同じく，(13)の行列式をとれば $|A-\lambda E|=0$ なので，$A-\lambda$ で消えるベクトルがある)．これは $A-\lambda E=[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ と書いたときの $\boldsymbol{v}_1$ または $\boldsymbol{v}_2$ で得られる(∵ (13)より，$(A-\lambda E)[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]=O$)．ここで，$|A-\lambda E|=0$ より $\boldsymbol{v}_1 = s\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}_2 = t\boldsymbol{v}$ と書け，$A-\lambda E=[s\boldsymbol{v}, t\boldsymbol{v}]$(2章定理3)．よってどんな $\boldsymbol{w}$ も，$A-\lambda$ でうつすと $\boldsymbol{v}$ の何倍かである：

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{w} = a\boldsymbol{v}.$$

($\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ なら，$a=sx+ty$ である．)　すべての $\boldsymbol{w}$ に対して $a=0$ なら，

$A-\lambda=O$ ということ．したがって $a\neq 0$ としてよく，$\boldsymbol{w}$ を $a$ でわれば

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v} \tag{14}$$

としてよい．このとき $k\boldsymbol{v}+l\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ なら，これを $A-\lambda$ 倍して

$$l(A-\lambda)\boldsymbol{w}(=l\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0} \qquad ((A-\lambda)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0} \text{ に注意})$$

よって $l=0$，$k=0$．つまり $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ は基底をなし，$|\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}|\neq 0$ である．

$\boldsymbol{v}$ と異なる方向のベクトルをとろうとしたら，(14)の関係式が最も簡単なものと言えるだろう．(13)より $(A-\lambda E)^2\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ のはずだが，

$$(A-\lambda E)^2\boldsymbol{w}=(A-\lambda E)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$$

として成り立つ．結局，$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ $(|\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}|\neq 0)$ が

$$(A-\lambda E)\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}, \qquad (A-\lambda E)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$$

のようにとれて，対角化のときのように並べて書けば(§3.4 の注参照)

$$(A-\lambda E)[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]=[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}]=[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]^{-1}(A-\lambda E)[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

この両辺に $\lambda E$ を加えれば

$$[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]^{-1}A[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} \tag{15}$$

となる．つまりジョルダン標準形(8)が再度得られた．

---

**注**　定理5は重根でないときも役に立ち，固有ベクトルが(半ば)自動的に作れる．$p_A(A)=O$ を(12)の形で見ると，$A-\mu E=[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ とすれば

$$(A-\lambda E)[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]=O. \tag{16}$$

つまり $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{0}$ でない限り $A$ の固有値 $\lambda$ の固有ベクトルとなる．($\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は $A\neq\lambda E$ なら独立でなく，一方が他方のスカラー倍となる．実際 $|\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}|=|A-\mu E|\neq 0$ なら，$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]^{-1}$ を(16)にかけ $A-\lambda E=O$ がしたがう．)

$$(A-\mu E)(A-\lambda E)=(A-\lambda E)(A-\mu E)=O$$

により，固有値 $\mu$ の固有ベクトルも同様に作れる．このように，固有値 $\lambda, \mu$ がわかっていれば固有ベクトルは($(A-\lambda)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ を改めて解かずに)得られてしまう．

---

**問**　(i)　2次行列に対するケーリー-ハミルトンの定理(10)を確かめよ．

(ii)　上の注の方法で，$B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ の固有ベクトルを求めてみよ．

以上はケーリー–ハミルトンの定理を対角化やジョルダン標準形のために使ってみる話だが，一方でこの定理は「やってみるとそうなっている」不思議な式だという印象があるかもしれない．これも $p_A$ を因数分解した(11)の形でとらえると納得しやすい．

まず $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$(対角行列)のときを考える．$P_A(t) = (t-\lambda)(t-\mu)$ であり

$$p_A(A) = \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} - \lambda E\right)\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} - \mu E\right)$$

であるが，この積が $O$ になるのは明らか：

$$p_A(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda-\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O. \tag{17}$$

$A$ が対角行列でないときも

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} (=: \overset{\text{ラムダ}}{\Lambda} \text{ とおく})$$

と対角化できれば，やはり同様である．実際

$$E = PEP^{-1}, \quad A = P\Lambda P^{-1}, \quad A^2 = P\Lambda^2 P^{-1}$$

を使えば

$$p_A(A) = p_A(P\Lambda P^{-1}) = P\,p_A(\Lambda)\,P^{-1}. \tag{18}$$

そして下の補題で示すように $p_A(t) = p_\Lambda(t)$ なので，対角行列のときの $p_\Lambda(\Lambda) = O$ より，この場合にも $p_A(A) = O$．座標をとりかえ対角化すれば「当たり前」の(17)を，対角化する前の行列で書いたのが(10)である．

**補題**　$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow p_A = p_\Lambda$．つまり固有方程式は座標系によらない．

**証明**　$A = P\Lambda P^{-1}$ より

$$A - tE = P\Lambda P^{-1} - tE = P(\Lambda - tE)P^{-1}$$

と書きなおせるので，行列式の乗法性を用いれば

$$\begin{aligned} p_A(t) &= |A - tE| = |P(\Lambda - tE)P^{-1}| \\ &= |P|\cdot|\Lambda - tE|\cdot|P^{-1}| = |\Lambda - tE| = p_\Lambda(t). \end{aligned}$$

---

**別証**　多項式 $p_A, p_\Lambda$ は(最高次の係数が1なので)その根つまり固有値できまる．$A$ の対角化が $\Lambda$ である以上，$p_A$ と $p_\Lambda$ は同じ根をもつ．∴ $p_A(t) = p_\Lambda(t)$．　□

---

$A$ が対角化できず，ジョルダン標準形 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ をもつ場合も同様である．実際(17)に対応して $\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \lambda E\right)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$．よって再び(18)より $p_A(A) = (A-\lambda E)^2 = O$．もちろんこれを認めて(15)に変形したのだから，その変形を逆にしただけである．

---

**注**　対角化できない可能性のあるのは，特性多項式が重根の場合で，(9)でいうと判別式 $\Delta := (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc = 0$ のとき．このような行列 $A$ の全体は，4変数 $a, b, c, d$ に1つの条件が課された結果として，(空間の中の曲面のように)行列全体の集合の中で「厚みのない図形」になっている．一方，行列 $p_A(A)$ の各成分は $a, b, c, d$ の多項式だが，対角化できれば(つまり，$\Delta = 0$ できまる「厚みのない図形」以外では)明らかに0((17)式)．多項式はその有限個の係数をきめればきまり，したがって有限個の条件できまるから，$\Delta \neq 0$ の(無限個の!)$A$ に対して $p_A(A) = O$ なら，じつはすべての $A$ に対し $p_A(A) = O$ であるべき．対角化できないときの定理5をこのようにも理解できる．

---

## 4.4　微分方程式とジョルダン標準形

すでに数列の問題に行列を使ってみたが，次のような問題も対角化やジョルダン標準形に関係がある．

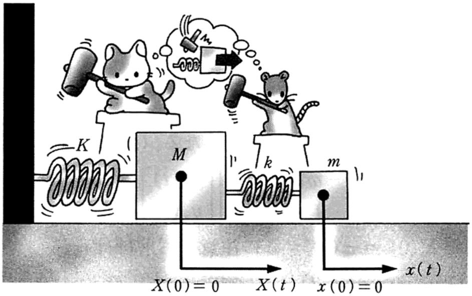



**図1**　連成バネの振動

2つの質量 $M, m$ が，バネ定数 $K, k$ のバネで図1のように結ばれているとしよう．バネ定数 $K$ のバネの一端は壁に固定されているとする．

ともに時刻 $t=0$ でつりあいの位置にあるとし，時刻 $t$ におけるそれぞれの変位を $X(t), x(t)$ とする $(X(0)=x(0)=0)$．$t=0$ で初速度が $X_0'$, $x_0'$ の運動を考えよう．運動方程式(質量×加速度 = 力)は

$$\begin{cases} mx''(t) = -k(x(t)-X(t)) \\ MX''(t) = +k(x(t)-X(t))-KX(t) \end{cases} \tag{19}$$

である．これを解けば運動がわかるが，行列を使って

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix} x(t) \\ X(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{k}{m} & \dfrac{k}{m} \\ \dfrac{k}{M} & -\dfrac{k+K}{M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ X(t) \end{bmatrix} \tag{20}$$

と書いておく．右辺の行列を $A$ とすると

$$|A-\lambda| = \lambda^2+\left(\frac{k}{m}+\frac{k+K}{M}\right)\lambda+\frac{kK}{mM} \tag{21}$$

である．この判別式を $D$ とすれば

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{k}{m}+\frac{k+K}{M}\right)^2-4\frac{kK}{mM} \\ &= \left(\frac{k}{m}-\frac{K}{M}\right)^2+2\left(\frac{k}{m}+\frac{K}{M}\right)\frac{k}{M}+\left(\frac{k}{M}\right)^2 \geqq 0. \end{aligned}$$

よって(21)の根は実数で，根と係数の関係よりともに負である．これらを

$$-\omega_\pm^2 = \frac{1}{2}\left\{-\left(\frac{k}{m}+\frac{k+K}{M}\right)\pm\sqrt{D}\right\} \qquad (\omega_\pm>0)$$

としよう．$D \neq 0$ ならこれらは異なり，対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_\pm$ を並べた $P=[\boldsymbol{v}_+, \boldsymbol{v}_-]$ は可逆である．

$$\begin{bmatrix} y_+(t) \\ y_-(t) \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} x(t) \\ X(t) \end{bmatrix} \tag{22}$$

と変換すれば，(18)は次の「対角型」になる．(§4.1と同様！)

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{bmatrix} y_+(t) \\ y_-(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_+^2 & 0 \\ 0 & -\omega_-^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_+(t) \\ y_-(t) \end{bmatrix} \tag{23}$$

これは簡単！　$X(0)=x(0)=0$ に注意して解けば

$$y_\pm(t) = \alpha_\pm \sin(\omega_\pm t). \tag{24}$$

この解は振動を表し，振幅 $\alpha_\pm = y_\pm'(0)/\omega_\pm$ は(21)から $X_0'$, $x_0'$ できまる．

つまり $x(t), X(t)$ はこれら「固有振動」$y_+(t), y_-(t)$ の和に分解され，$-A$ の固有値 $\omega_\pm^2$ は固有振動の角速度(の 2 乗)という意味をもつ[4)]．

さて，$\dfrac{k}{m}=\omega^2$，$\dfrac{K}{M}=\Omega^2$ を固定しつつ，$\dfrac{m}{M}\to 0$ としよう．すると

$$A=-\frac{k}{m}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -\dfrac{m}{M} & \dfrac{m}{M}+\dfrac{mK}{kM}\end{bmatrix}\longrightarrow -\omega^2\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & \dfrac{\Omega^2}{\omega^2}\end{bmatrix}=:A_0$$

となる(つまり $\dfrac{k}{M}\to 0$)．方程式(19)でいえば次の形である．

$$\begin{cases} x''(t)=-\omega^2(x(t)-X(t)) \\ X''(t)=-\Omega^2X(t) \end{cases} \tag{25}$$

大質量 $M$ が影響を受けないまま(第 2 式)$m$ に一方的に影響をおよぼす(第 1 式)．$A_0$ は $-\omega^2, -\Omega^2$ が固有値で，(25)は $\omega^2\neq\Omega^2$ ならさっきと同様に解ける．

$$\begin{cases} X(t)=\dfrac{X_0'}{\Omega}\sin\Omega t \\[2ex] x(t)=\alpha\sin\omega t+\dfrac{X_0'/\Omega}{1-\Omega^2/\omega^2}\sin\Omega t \end{cases} \tag{26}$$

$\alpha$ は $x_0'=\alpha\omega+\dfrac{X_0'}{1-\Omega^2/\omega^2}$ できまるから，整理すると

$$x(t)=x_0'\frac{\sin\omega t}{\omega}-\frac{X_0'}{1-\Omega^2/\omega^2}\left(\frac{\sin\omega t}{\omega}-\frac{\sin\Omega t}{\Omega}\right).$$

さて，$\omega\to\Omega$ のときが問題．このとき $\sin\omega t\to\sin\Omega t$ で，上の $x(t)$ の式も発散する分母をもつ．これは $A_0$ が $\omega^2=\Omega^2$ で対角化できないことに対応する．ジョルダン標準形を導いた発想で極限をとれば

$$x(t)\xrightarrow{\omega\to\Omega}\left(x_0'+\frac{X_0'}{2}\right)\frac{\sin\Omega t}{\Omega}-\frac{X_0'}{2}t\cos\Omega t. \tag{27}$$

これが $m$ の運動を表すが，第 2 項の $t$ により時間とともに振幅が大きくなる．ブランコをタイミングよく押すと振れが大きくなるように，$M$

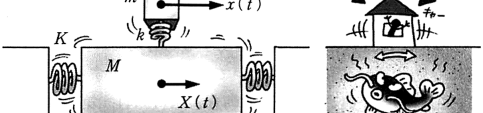



図 2　建物の振動のモデル

の振動の影響で $m$ が次第に大きく揺れるわけだ(共振).

図1は90度回転すれば，地震による建物の振動のモデルとも考えられる(図2). その場合 $\Omega$ と $\omega$ は，地盤と建物それぞれの固有振動の(周期)$^{-1}$ $\times 2\pi$ を表す. $\omega = \Omega$ だと振幅が時刻に比例して大きくなって，現実にはあるところで壊れる結果になるだろう!

**問**　(25)を解き(26)を得よ[ヒント：対角化(23)によればよいが，(22)のように $y_\pm$ は $x$ と $X$ の1次結合]. また極限(27)を確かめよ.

## 道案内

1）フィボナッチ(Fibonacci「ボナッチ家の子」または Leonardus filius Bonaccii)はピサのレオナルドともいわれる数学史上の有名人. 13世紀当時の先進世界だったイスラム社会からヨーロッパに，インド-アラビア数字による「算数」を伝え，$1+2+2^2+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$ なども知っていたという. (Joseph and Frances Gies, *"Leonard of Pisa"*, Crowell, New York 1969.)　なお，フィボナッチ数列には($m \mid n$ で「$m$ が $n$ を割りきる」を表すとき) $m \mid n \Leftrightarrow x_m \mid x_n$ などの面白い性質がある(中村滋『フィボナッチ数の小宇宙』日本評論社(2002)).

2）この意味で，ジョルダン標準形の理論は安定でない. すなわちデータ $A$ の微小な変動に大きく依存している.

3）A. Cayley(1821-1895), W. Hamilton(1805-1865). ファン・デル・ヴェルデン『代数学の歴史』(加藤明史訳，現代数学社(1994), p. 289)によれば，ケーリーが1858年に言明したのが最初だが，ハミルトンも4元数(付録A)と関連して考察したという. 両者はともに行列の理論に大きく貢献した. なお「ジョルダン標準形」のC. Jordan(1838-1922)についても同書第7章に詳しい.

4）4節のようなモデルは共振を一般に説明すると考えられ，より大きな行列を用いることでより複雑な構造(家，橋，…)についても同様に解析することができる. 物理的側面については戸田盛和『一般力学30講』朝倉書店(1994)，第9講なども参照.

## 練習問題

**4-1**　2次行列 $A$ の固有方程式の2根を $\lambda, \mu$ とするとき，以下を示せ．

(i)　$\lambda+\mu = \mathrm{tr}\,A$, $\lambda\mu = \det A$．ここで $\mathrm{tr}\,A$ は $A$ のトレース(§3.5)とする．

(ii)　$A$ が逆行列をもつ $\Longleftrightarrow$ $A$ が0を固有値としない．

(iii)　$\lambda = \mu = 0 \Longleftrightarrow A^2 = O$．

**4-2**　(i)　次の行列を対角化せよ：$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3/4 & 1 \end{bmatrix}$.

(ii)　漸化式 $a_{n+1} = a_n + \dfrac{3}{4} a_{n-1}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ で定まる数列を考える．ベクトル $\boldsymbol{v}_n := \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix}$ が $\boldsymbol{v}_{n+1} = A\boldsymbol{v}_n$ を満たすことに注目して，一般項 $a_n$ を $a_0, a_1$ で表せ．

(iii)　$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ のための，初期値 $a_0, a_1$ に対する必要十分条件を求めよ．

**4-3**　山奥の大学に2つの食堂 $X, Y$ がある．調査の結果，ある日の昼食に $X$ で食事した客が翌昼に $X, Y$ で食事する割合はそれぞれ 0.7, 0.3 であった．また $Y$ の客が次に $X, Y$ で食事をする割合は 0.4, 0.6 であった．これを行列 $A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$ に，また現在の $X$ と $Y$ の客数比 $x : y$ を $\boldsymbol{v}_0 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ にまとめると，傾向が一定であれば $n$ 日後の客の割合は $A^n\boldsymbol{v}_0$ と予測されるであろう．

この理想化された状況について以下に答えよ．

(i)　現在 $x : y = 3 : 7$ であり，客の総数は1000人で減少しないとする．今後100日間の店 $X, Y$ それぞれの客の延べ人数を予測せよ．

(ii)　$n$ が十分大のときの客の割合 $x : y$ を予測せよ．

**4-4**　$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ が $a_{ij} > 0$, $a_{11}+a_{21} = a_{12}+a_{22} = 1$ をみたすとき，2次の**確率行列**という．このような $A$ が1を固有値にもつことを示せ．

**4-5**　$n$ 乗を求めよ．(i)　$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$　　(ii)　$A = \begin{bmatrix} 1 & t+1 \\ t-1 & -1 \end{bmatrix}$

# 5章：解析との関連から

2次行列のしめくくりに，微積分に関連する話題を2つ．無限和も登場するが，おおらかに扱うことにする．

## 5.1　2次曲面の概形

第1の話題．3章でも扱った，$x$ と $y$ の**2次形式**

$$ax^2+2bxy+cy^2=[x,y]B\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\quad\left(B:=\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}\right)\tag{1}$$

を考える．ただし $a,b,c,x,y$ は実数とする．これを簡単に $B(x,y)$ と書くと，以前調べた2次曲線(§3.3～3.5)は

$$B(x,y)=z\tag{2}$$

の形である．ここで $z$ は実定数だが，$x,y$ と同等の変数とみれば3次元空間に曲面ができる．この**2次曲面**は2変数関数の極値問題を考える上で，1変数のときの2次関数にあたる．これが前半(§5.1～5.2)の主役である．

2次曲線(2)を調べるには，実対称行列($B={}^tB$)が回転行列で対角化できることを使った：

**定理 6**　実対称行列 $B$ は，適当な回転行列 $R(\theta)$ で

$$R(\theta)^{-1}BR(\theta)=\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{bmatrix}\quad\left(R(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\right)$$

と対角化でき，固有値 $\lambda,\mu$ は実数．よって変数変換

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=R(\theta)\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}$$

により，$B(x,y)=\lambda X^2+\mu Y^2$ と標準化できる．　□

すでに計算で確かめたが(練習問題3-3)，ここで計算によらない説明をしておこう．(対角化できるのはいいことだが，なぜ回転でできるのか？)

2つの $\mathbf{0}$ でない平面ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ が直交していれば，長さ1にとりかえることで $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]$ または $[\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_1]$ がある角 $\theta$ の回転行列 $R(\theta)$ になる．つまり固有ベクトルが互いに直交することを示せば，回転行列で対角化で

きることの説明になる．

そこで内積の復習．2つの平面(実)ベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}'=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ について，内積は $xx'+yy'$ で定まる実数であった．高校流では内積を $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}'$ と書くが，以下 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}')$ と書こう．$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})=x^2+y^2=|\boldsymbol{v}|^2$．また $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'\neq\boldsymbol{0}$ に対し，$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}')=0$ は $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{v}'$(垂直)を意味していた．

これに次の知識を付け加えよう：それは内積を

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}')=[x, y]\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}={}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}' \tag{3}$$

と書く書きかたと，これから簡単にわかる次の式：

**命題**　$(A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}')=(\boldsymbol{v}, {}^tA\boldsymbol{v}')$　　(${}^tA$ は $A$ の転置行列)　　(4)

**証明**　$A=\begin{bmatrix}a & b\\b' & c\end{bmatrix}$ に対して，${}^tA=\begin{bmatrix}a & b'\\b & c\end{bmatrix}$ であり，${}^t(A\boldsymbol{v})={}^t\boldsymbol{v}{}^tA$ であった(§3.3の注)．よって

$$(A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}')={}^t(A\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}'={}^t\boldsymbol{v}{}^tA\boldsymbol{v}'=(\boldsymbol{v}, {}^tA\boldsymbol{v}').$$

これで示されたが，念のため直接確かめてみると

$$\text{左辺}=[ax+by, b'x+cy]\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix},\qquad \text{右辺}=[x, y]\begin{bmatrix}ax'+b'y'\\bx'+cy'\end{bmatrix}$$

である．これらはともに $axx'+b'xy'+bx'y+cyy'$ で等しい．　□

この命題を(1)の $B(={}^tB)$ に用いる．その前に，$B$ の固有値は

$$0=|B-\lambda|=\lambda^2-(a+c)\lambda+(ac-b^2)$$

より求められるが，この判別式を $D$ とすると

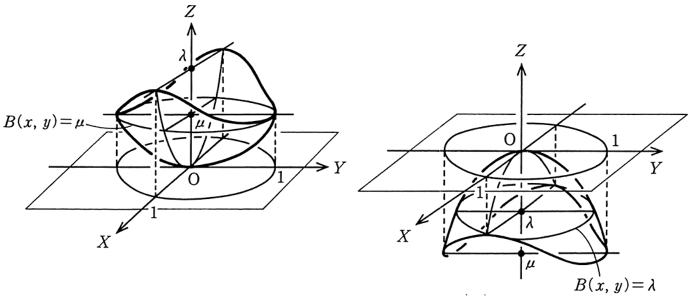
$$D=(a+c)^2-4(ac-b^2)=(a-c)^2+4b^2\geqq 0.$$

よって $B$ の固有値は実数である．しかも重根なら $a=c$, $b=0$ で $B$ はスカラー行列である(はじめから対角！)．

そこで重根でなければ，異なる $\lambda, \mu$ を固有値とする固有ベクトル $\boldsymbol{v}_\lambda, \boldsymbol{v}_\mu$ がある．すると(4)より，

$$\lambda(\boldsymbol{v}_\lambda, \boldsymbol{v}_\mu)=(B\boldsymbol{v}_\lambda, \boldsymbol{v}_\mu)\overset{(4)}{=}(\boldsymbol{v}_\lambda, B\boldsymbol{v}_\mu)=\mu(\boldsymbol{v}_\lambda, \boldsymbol{v}_\mu). \tag{5}$$

これが決定的で，$(\lambda-\mu)(\boldsymbol{v}_\lambda, \boldsymbol{v}_\mu)=0$ と移項すれば，$\lambda\neq\mu$ より $(\boldsymbol{v}_\lambda, \boldsymbol{v}_\mu)$




（ア）　$\lambda, \mu > 0$（楕円放物面）　　（イ）　$\lambda, \mu < 0$（楕円放物面）

**図1**　非退化な場合の曲面 $z = B(x, y)$．（ア）〜（ウ）はそれぞれ $B$ が正定値，負定値，不定（定値でない）のとき．（エ）は $z = \lambda X^2$（$\mu = 0$）と退化した場合．

$= 0$．すなわち固有ベクトルは直交する．したがって長さを1にし，必要なら $\boldsymbol{v}_\lambda, \boldsymbol{v}_\mu$ を入れかえれば $[\boldsymbol{v}_\lambda, \boldsymbol{v}_\mu]$ が回転行列となる！ □

曲線 $\lambda X^2 + \mu Y^2 = z$（一定）は，$\lambda\mu > 0$ なら楕円（$z$ の符号によっては空集合，$z = 0$ なら原点のみ）であり，$\lambda\mu < 0$ なら双曲線（$z = 0$ なら交わる2直線）．これらが(2)の「高さ一定」の切り口だから，あとは $z$ を動かせば概形が描ける（図1）．また $\lambda\mu = 0$ のときは $B = \lambda X^2$ などであり，$Y$（または $X$）によらず「退化」している．この場合，概形は放物線 $z = \lambda X^2$ を $Y$ 方向に平行移動して得られる（図1（エ））．

この場合わけに対応して，$B$ にも名前がついている．

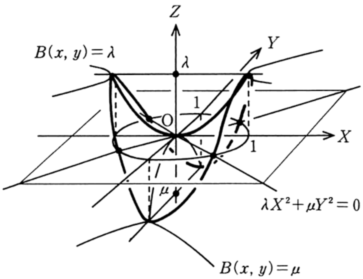
**定義4**　実対称行列 $B$ あるいは(1)で定まる実係数の2次形式 $B(x, y)$ について次のようにいう．

$B$ が**非退化**（**退化**）$:\Longleftrightarrow |B| \neq 0 \quad (|B| = 0)$

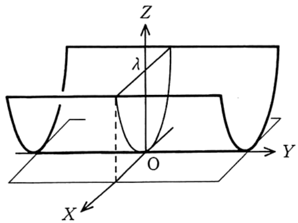
$B$ が**正定値**（**負定値**）$:\Longleftrightarrow$ 任意の $(x, y)$ に対し $B(x, y) \geqq 0$ $(\leqq 0)$
かつ，等号成立は $x = y = 0$ に限る．

正定値と負定値をまとめて，**定値**という．

$B$ が**不定** $:\Longleftrightarrow$ 非退化だが定値でない． □




（ウ）　$\lambda > 0 > \mu$（双曲放物面）




（エ）　$\mu = 0$ $(\lambda > 0)$（放物柱面）

$B(x, y) = \lambda X^2 + \mu Y^2$ と標準化していいかえれば，これらはもちろん次を意味している．

$$B \text{ が非退化(退化)} \Longleftrightarrow \lambda\mu \neq 0 \ (\lambda\mu = 0)$$
$$B \text{ が正定値(負定値)} \Longleftrightarrow \lambda, \mu > 0 \ (\lambda, \mu < 0) \qquad (6)$$
$$B \text{ が不定} \Longleftrightarrow \lambda\mu < 0$$

---

**注**　$a, b, c$ あるいは $x, y$ が複素数の場合は，$B(x, y)$ がそもそも実数とは限らず，定値性はとりあえず数の範囲が実数でないと意味がないことに注意しよう．なお(非)退化，正定値(負定値)，不定は順に(non)degenerate，positive(negative) definite, indefinite という．

---

**問**　次の２次形式が定値か判定せよ．

（ i ）　$x^2+2xy+2y^2$　（ ii ）　$x^2-2xy+y^2$　（iii）　$xy$

## 5.2　2変数の極値問題との関係

１変数の微積分では，グラフを直線で近似する考えかたを発展させて，なめらかな関数 $f$ を

$$f(x_0+x) = f(x_0) + xf'(x_0) + \frac{x^2}{2!}f''(x_0) + \frac{x^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots \qquad (7)$$

と近似する**テーラー展開**が基本的である．この自然さは，両辺を $x$ で次々と微分し $k$ 階微分を比較すれば納得できるだろう．なめらかな2変数関数についても，$(x_0, y_0)$の近くの点を$(x_0+tx, y_0+ty)$と書いて $t$ の関数とみれば，2変数のテーラー展開

$$f(x_0+tx, y_0+ty)-f(x_0, y_0)$$
$$= t\left(\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y\right)+\frac{t^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}xy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y^2\right)+\cdots$$

が得られ，よい近似を与える．ここで偏微分係数は，すべて$(x_0, y_0)$での値 $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$，$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ 等であり，最後の … は $t$ の3次以上の項からなる．この右辺を次のように書こう：

$$t\cdot \mathrm{grad}\, f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\frac{t^2}{2}[x, y]H\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\cdots \qquad (8)$$

$$\left(\mathrm{grad}\, f := \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right], \quad H := \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}\right)$$

(第2項は，前節にならって $\frac{t^2}{2}H(x, y)$ とも書ける)．第1項の $\mathrm{grad}\, f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$ は，グラフ $z = f(x, y)$ に $(x, y) = (x_0, y_0)$ で書いた接平面

$$z-f(x_0, y_0) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad (9)$$

の傾きを並べたものであり，**勾配**(gradient)**ベクトル**とよばれる．(9)の右辺は内積の形なので，$x^2+y^2$ が一定なら $[x, y] /\!/ \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$(平行)のときに接平面の高さ変化が最大になる．

ある$(x, y)$で $\mathrm{grad}\, f = \mathbf{0}$ ならば，その点で接平面は水平となり，そのような$(x, y)$が関数が極値をとる点の候補を与える．これを $f$ の**臨界点**(critical point)とよぶ．つまり $\mathrm{grad}\, f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right] = [0, 0]$ で，展開(8)の1次の項が消える点$(x_0, y_0)$が，$f$ の臨界点である．

1変数のときは，$f'(x_0) = 0$ かつ $f''(x_0) > 0$ なら，$x_0$ の近くでの $f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で近似され，$f(x_0)$ は極小値となるのだった．

2変数でも，臨界点では(8)の2次の項 $\frac{t^2}{2}H(x, y)$ が極大・極小にかかわってくる．行列 $H$ を，$f$ の$(x_0, y_0)$における**ヘッセ行列**(Hessian)とよぶ．$H$ が非退化なら $f$ の臨界点付近でのグラフは図1のようになり，$H$

が定値かどうかで $f(x_0, y_0)$ が極値か否かがきまる．

---

**注**　$H$ が退化している図1(エ)のような場合，一般の $f$ では2次形式と違ってさらに高次の項が関係するので，極値かどうかを2階微分係数まででは判定できない．

---

さて定値性を判定するためには，(6)とは別の便利な条件がある．一般に(1)の $B(x,y)$ が正(負)定値なら，もちろん $B(1,0)=a>0$ $(a<0)$ である．そして正または負定値なら固有値の積は正なので

$$\lambda\mu = |R(\theta)^{-1}BR(\theta)| = |B| = ac-b^2 > 0.$$

逆にこれらをあわせると，$B$ の定値性と同値になるのである．

**定理 7**　2次の実対称行列 $B=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ が正(負)定値であるためには，$a>0$，$|B|>0$ $(a<0$，$|B|>0)$ が必要十分である．

**証明**　必要性はすでに述べた．十分性は次のラグランジュの変形(平方完成！)をすればわかる：

$$ax^2+2bxy+cy^2 = a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2+\frac{ac-b^2}{a}y^2. \qquad \square$$

---

**注**　$y$ に注目した平方完成 $ax^2+2bxy+cy^2 = c\left(y+\frac{b}{c}x\right)^2+\frac{|B|}{c}y^2$ によれば

$$c>0,\ |B|>0 \qquad (c<0,\ |B|<0)$$

とも同値であることがわかる．

---

極値の判定法としても定理7が紹介されることが多い．すなわち $f$ の臨界点 $(x_0, y_0)$ で $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$ $(<0)$ かつ $|H|>0$ ならば，$f(x_0, y_0)$ は極小値(極大値)である．

さて，ここで違和感を感ずる方は鋭い．これまで回転行列で標準化することを論じていたのに，上のラグランジュの変形では回転らしきものが出てこない．それでも，たとえば

$$x^2-2xy+2y^2 = (x-y)^2+y^2 \tag{10}$$

($x$ に注目して平方完成した)により，正定値であることはたしかにわかる．

この場合，回転によるには

$$x^2-2xy+2y^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}X_+^2+\frac{3-\sqrt{5}}{2}X_-^2$$

$$\left(X_\pm=\pm\left(x-\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}y\right)\Big/\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}}\right)$$

という計算になり大変である．一方，計算が簡単な(10)の変形を

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-y \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{11}$$

という変換と思えば，これは $x$ 方向のずらしである(2章図3)．長さや直交性を保たない点が回転と異っている(概形を描くとき要注意：図2)．

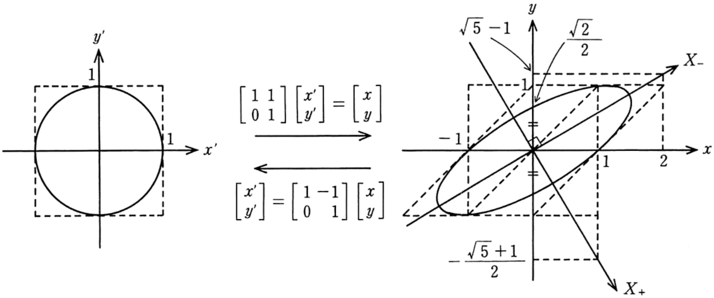



図2 $x^2-2xy+2y^2=1$ の概形(平方完成(10)による)

あらためて考えると，$B(x,y)={}^t\boldsymbol{v}B\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$) を一般の可逆行列 $P$ で変数変換 ($\boldsymbol{v}=P\boldsymbol{w}$) すれば

$${}^t\boldsymbol{v}B\boldsymbol{v}={}^t\boldsymbol{w}{}^tPBP\boldsymbol{w}$$

となる．つまり $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ の成分 $x', y'$ で $B(x,y)$ を表すときの係数行列は，${}^tPBP$ であり $P^{-1}BP$ ではない．$P$ を回転行列に限れば，${}^tP=P^{-1}$ なので見分けがつかないが，2次形式の一般の変数変換は本来対角化と違う内容を含んでいる(たとえば $B\to P^{-1}BP$ とするとき行列式は変化しないが，$B\to{}^tPBP$ とするときは $|B|\to|P|^2|B|$ と変化する)．

では，回転行列 $R(\theta)$ による対角化に特別な意味があるだろうか．$R(\theta)$ を固有ベクトルを並べて作ることを考えれば，これは固有ベクトルの意味は何か？ という問いである．じつは $B$ の増減が最も はげしいのが，固有ベクトルの方向ということができる．

**定理 8**　$(x, y)$ を単位円に制限するとき，$B(x, y)$ は $B$ の固有ベクトルの方向で極値をとる．

**証明**　回転による標準化で$(X, Y)$座標にうつっても単位円は保たれるので，$(X, Y) = (\cos t, \sin t)$ として

$$B(x, y) = \lambda X^2 + \mu Y^2 = \lambda \cos^2 t + \mu \sin^2 t$$

を調べる．$\lambda = \mu$ ならこれは一定で，つまり $B$ にとってどの方向も同じである．$\lambda > \mu$ と仮定しよう．

$$\lambda \cos^2 t + \mu(1 - \cos^2 t) = (\lambda - \mu)\cos^2 t + \mu$$

と書きなおせば，$\cos^2 t = 1$（$X$ 軸），$\cos^2 t = 0$（$Y$ 軸）でそれぞれ最大値 $\lambda$，最小値 $\mu$ をとることがわかる．□

つまり $B$ は $X$ 軸，$Y$ 軸方向で「増減がはげしい」．ただし，原点から距離が一定のところで比較しての話である（$B(x, y) = k \neq 0$ なら，$B(tx, ty) = kt^2$ は遠くにいくほど絶対値が大きくなる！）．(11)のように距離を変える変換も便利なことは多いから，これは注意してよいことだろう[1)]．

この注意書きの上で，つまり $x^2 + y^2 = 1$ で単位円が定まる座標で考えたとき，単位円上での $B(x, y)$ の極大・極小を与える方向が $B$ の固有ベクトルの方向である．これらを求めて $B$ を対角化することは，単に定値かどうかより詳しいことを調べているのである．

**問**　(i)　$xyz$ 空間の 2 次曲面 $z = xy$ の概形を描け．

(ii)　§5.1 問の 2 次式について原点におけるヘッセ行列 $H$ を求めよ．

## 5.3　ベクトル値関数の微分方程式

第 2 の話題．4 章では対角化やジョルダン標準形が登場する例として，行列のでてくる微分方程式を扱った．いきなり 2 階微分を含むものを考えたが，順番としては 1 階の微分方程式から考えるべきだろう．

そこで $A$ は与えられた 2 次正方行列，$\boldsymbol{v}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ は 2 成分ベクトルを値とする $t$ の関数（関ベクトル？）として，次の微分方程式を考える．

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}(t) = A\boldsymbol{v}(t) \left( \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \right) \tag{12}$$

(12)は漸化式 $\boldsymbol{v}_{n+1} = A\boldsymbol{v}_n$(§4.1) の連続版でもある．実際

$$\frac{1}{\varepsilon}(\boldsymbol{v}(t+\varepsilon) - \boldsymbol{v}(t)) = A\boldsymbol{v}(t) \tag{13}$$

の $\varepsilon \to 0$ の極限だが，これは

$$\boldsymbol{v}(t+\varepsilon) = \boldsymbol{v}(t) + \varepsilon A\boldsymbol{v}(t) = (1+\varepsilon A)\boldsymbol{v}(t) \tag{14}$$

と書きなおせる．つまり $\boldsymbol{v}(t+2\varepsilon), \boldsymbol{v}(t+3\varepsilon), \cdots$ は行列 $1+\varepsilon A (= E + \varepsilon A)$ 倍で次々ときまってゆく：

$$\boldsymbol{v}(t+n\varepsilon) = (1+\varepsilon A)^n \boldsymbol{v}(t). \tag{15}$$

「$\boldsymbol{v}(t+\varepsilon)$ は $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}$ に $\varepsilon A\boldsymbol{v}$ を加えて決まる」のが(14)だから，各点 $\mathrm{P}(\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{v})$ に小さな矢印 $\varepsilon A\boldsymbol{v}$ を書き，それを順につないで $\boldsymbol{v}(t+n\varepsilon)$ ができる．図3は $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ のときで，$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ は直線 $l：x = y$ に関する折り返し．したがって各点 $\mathrm{P}$ $(\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{v})$ に，$\varepsilon A\boldsymbol{v} = (\varepsilon\boldsymbol{v}$ を $l$ で

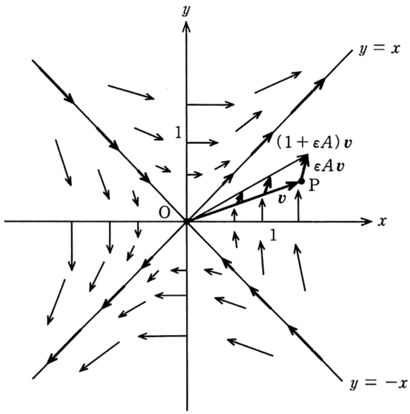



**図3**　$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ が定めるベクトルの「場」(12)．このように平面の各点に「矢印をつけた」ものを平面上の**ベクトル場**といい，矢印に沿った流れ $\boldsymbol{v}(t)$ の軌跡をこのベクトル場の**積分曲線**という．各点で独立にニョキニョキとベクトルがついているのが一般のベクトル場で，今のように行列で定まるものはその一例である．行列で定まる場合はつねに原点にベクトル $\mathbf{0}$ がついている特殊なものだが，逆にそのような場合の典型例を与える．

折り返したベクトル)が書いてある．矢印 $\varepsilon A\boldsymbol{v}$ をつないだ軌跡が $\varepsilon\to 0$ でどうなるか？に答えるのが，(12)の解である．

**問**　$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ について，図3に対応するベクトル場を描け．

## 5.4　行列の指数関数

(12)を解くには $A$ の対角化を使うのが手っ取り早い．数列の問題のとき $A^n$ を計算したのと同じである．でも，その前にちょっと考えてみよう．

(15)は(13)をみたし，$\varepsilon\to 0$ のとき(13) → (12)．そこで(15)をもとに(12)の解を表示してみる．$n\varepsilon=s$ を固定しつつ $\varepsilon\to 0$ の極限をとれば

$$\boldsymbol{v}(t+s)=\lim_{\varepsilon\to 0}(1+\varepsilon A)^n\boldsymbol{v}(t)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{s}{n}A\right)^n\boldsymbol{v}(t)$$

$t=0$ とし，$s$ をあらためて $t$ と書けば

$$\boldsymbol{v}(t)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}A\right)^n\boldsymbol{v}(0). \tag{16}$$

よって(12)の解を求めることは，極限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{tA}{n}\right)^n \tag{17}$$

を定めることにほかならない．

さて，(17)に見覚えがないだろうか．$x$ が実数なら

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \tag{18}$$

であった($1/n$ 年での利率を一定値 $x$ としたときの1年間($n$ ステップ)複利の元利合計が，$n\to\infty$ で一定値 $e^x$ になる)．(17)の極限が存在すれば，$e^{tA}$ と書いて**行列 $tA$ の指数関数**とよぶべきだろう．実際

$$\frac{d}{dt}\left(1+\frac{tA}{n}\right)^n=A\left(1+\frac{tA}{n}\right)^{n-1}$$

の極限で，次も成り立つはずである．

$$\frac{d}{dt}e^{tA}=Ae^{tA} \tag{19}$$

これは $A$ が数のときの指数関数の性質と同じであり，(16)が解となるのもこの性質による：

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\boldsymbol{v}(0)\right)=\frac{d}{dt}(e^{tA})\,\boldsymbol{v}(0)=Ae^{tA}\boldsymbol{v}(0).$$

極限(17)は，すべての $A$ について存在する．実際 $A=P\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}P^{-1}$ と対角化できれば，$1+\frac{t}{n}A$ も対角化できて

$$1+\frac{t}{n}A=1+\frac{t}{n}P\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}P^{-1}=P\left(1+\frac{t}{n}\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}\right)P^{-1}$$

$$=P\begin{bmatrix}1+\frac{t}{n}\lambda & 0\\ 0 & 1+\frac{t}{n}\mu\end{bmatrix}P^{-1}.$$

よって $\lambda,\mu$ が実数なら，(18)より

$$\left(1+\frac{tA}{n}\right)^n=P\begin{bmatrix}\left(1+\frac{t}{n}\lambda\right)^n & 0\\ 0 & \left(1+\frac{t}{n}\mu\right)^n\end{bmatrix}P^{-1}\xrightarrow{n\to\infty}P\begin{bmatrix}e^{t\lambda} & 0\\ 0 & e^{t\mu}\end{bmatrix}P^{-1}\tag{20}$$

となる．問題の極限(17)が通常の(数の)指数関数で表された．この意味で新しい関数は出てこないが，行列でまとめて考えられる点が大事である．

**例1**　図3の $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ は $P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ で対角化され，固有値は1，−1である．よって(20)より

$$e^{tA}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{t} & 0\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}^{-1}.$$

これを計算し，さらに**双曲線関数**

$$\cosh t:=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\qquad \sinh t:=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

を使えば，結果は次のようになる(確かめよう)．

$$\boldsymbol{v}(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cosh t & \sinh t\\ \sinh t & \cosh t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0)\\ y(0)\end{bmatrix}\tag{21}$$

これより $\boldsymbol{v}(t)$ の終点が描く軌跡も $x(t)^2-y(t)^2=$ 一定 とわかる(図4)．

**問**　(i)　(21)が方程式(12)：$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}(t)=A\boldsymbol{v}(t)\left(A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)$ の解であることを確かめよ．

(ii)　$A=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ に対し，$e^{tA}$($t$ は実数)を求めよ．

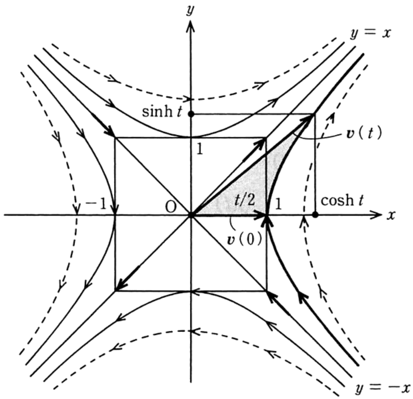



図4　$v'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v(t)$，$v(0) = e_1$ の解曲線(21).

---

**注**　行列の常で，一般に $e^{sA}e^{tB} = e^{tB}e^{sA}$ は $AB = BA$ でないと成り立たない．一方，$e^{A+B} = \lim_{n\to\infty}(e^{A/n}e^{B/n})^n$（トロッターの公式，練習問題16-6）が知られている．$E(n\varepsilon) := (e^{\varepsilon A}e^{\varepsilon B})^n$ は，$n\varepsilon = t$ とすると $E(t+\varepsilon)-E(t) = (e^{\varepsilon A}e^{\varepsilon B}-1)E(t)$ を満たすので，$t$ を一定としつつ $\varepsilon\to 0\,(n\to\infty)$ とすれば $E'(t) = (A+B)E(t)$．よって極限の存在を認めれば，同じ方程式の解として $(e^{tA/n}e^{tB/n})^n \to e^{t(A+B)}$．

---

## 5.5　回転行列とオイラーの式

(20)で固有値が実数でないときは，まだカタがついていない．$(1+\lambda/n)^n$ $(\lambda\in \boldsymbol{C})$ の極限をどう考えたらよいか？という問題がある．それには指数関数の(17)以外の表示があると便利である．

まず $x$ は実数とし，$(1+x/n)^n$ を2項展開すると

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{x^k}{k!} \tag{22}$$

この $n\to\infty$ の極限をとることで

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{x^k}{k!} \tag{23}$$

が得られる．これはテーラー展開(7)にほかならない．そこで一般の複素

数 $z$ についても，$z$ の指数関数を

$$e^z := 1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

と定義しよう．これはすべての $z\in \boldsymbol{C}$ について収束し，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ に等しいことが知られている((22)→(23)を形式的に認めればよい)．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\lambda t} &= \frac{d}{dt}\left(1+\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2}+\frac{(\lambda t)^3}{3!}+\cdots\right)\\ &= \lambda+\lambda^2 t+\frac{\lambda^3 t^2}{2}+\frac{\lambda^4 t^3}{3!}+\cdots\\ &= \lambda\left(1+\lambda t+\frac{(\lambda t)^2}{2}+\frac{(\lambda t)^3}{3!}+\cdots\right)\end{aligned} \tag{24}$$

であるから，$\lambda$ が複素数でも $\frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$ となることがわかる．

そこで行列 $A$ の指数関数も，$e^z$ にならって

$$E+tA+\frac{(tA)^2}{2}+\frac{(tA)^3}{3\,!}+\frac{(tA)^4}{4\,!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n\,!} \tag{25}$$

($A^0 = E$ とする)という行列の無限和で考えよう．実際，(22) → (23)を形式的に認めれば(文字 $x$ の恒等式と考え，行列 $A$ を代入すれば)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{tA}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n\,!} \tag{26}$$

も成り立つと期待でき，また確かめることができる(下の問)．(25)をあらためて $e^{tA}$ と書けば，(24)と同じ計算で

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}(= e^{tA}A)$$

もわかる．以上で行列の指数関数(17)のもう1つの表示(25)が得られた．

**問** 複素数 $\lambda$ に対し $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^\lambda$ であることを既知とし，(26)を

(i) $A$ が $\Lambda = \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}$ のとき，また $\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ のとき確かめよ．

(ii) 一般の $A$ のとき確かめよ．

**例2** $J := \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ に対し $e^{tJ}$ を求めてみよう．$J$ の固有値は，$|J-\lambda E| = \lambda^2+1$ より $\pm i$ である．

また $J = R(\pi/2)$ (90度回転)なので，図3のようなベクトル場 $\varepsilon J\boldsymbol{v}$ を描くには，各点 $\boldsymbol{v}$ の終点に $\boldsymbol{v}$ と直交するベクトルを書けばよい(図5)．

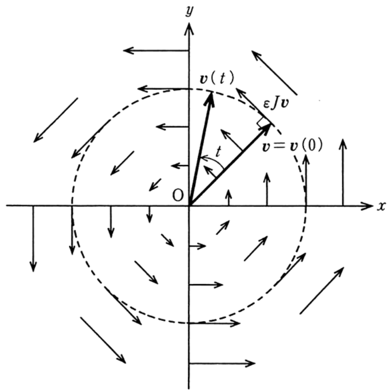



図5　$J=R(\pi/2)$ の定めるベクトル場と解曲線

さて $J^2=-E$ と(25)によれば，対角化せずに $e^{tJ}$ が計算できる：(25)に現れる行列は $E(=J^4)$，$J$，$J^2(=-E)$，$J^3(=-J)$ の繰り返しなので

$$e^{tJ}=E+tJ+\frac{-t^2}{2}E+\frac{-t^3}{3!}J+\frac{t^4}{4!}E+\frac{t^5}{5!}J+\cdots$$
$$=\left(1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}+\cdots\right)E+\left(t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots\right)J.$$

ここで，三角関数に対するテーラー展開[2)]

$$1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}=\cos t, \tag{27}$$
$$t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sin t$$

が使える．よって

$$e^{tJ}=(\cos t)E+(\sin t)J=\begin{bmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{bmatrix}. \tag{28}$$

回転行列 $R(\theta)$ が指数関数として出てきた！　これより

$$\boldsymbol{v}(t)=e^{tJ}\boldsymbol{v}(0)=R(t)\boldsymbol{v}(0) \qquad \left(\boldsymbol{v}(0)=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right)$$

の軌跡は，$\boldsymbol{v}(0)$ を通る原点中心の円であることがわかる．

対角化を用いた計算もしてみよう．それには，$J$ の固有値 $\pm i$ に対する

$e^{\pm it}$ を求めねばならない．ところが $(\pm i)^2=-1$ により，$e^{\pm it}$ の計算は $e^{tJ}$ の場合とまったく同じである：(28)で $J$ を $\pm i$ におきかえるだけで

$$e^{\pm it}=\cos t\pm i\sin t. \tag{29}$$

微分すると

$$-\sin t\pm i\cos t=\pm i(\cos t\pm i\sin t)$$

であり，たしかに $(e^{\pm it})'=\pm ie^{\pm it}$ をみたす．よって

$$J=P\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}P^{-1} \qquad \left(P=\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

より

$$e^{tJ}=P\begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix}P^{-1}=\frac{1}{2i}\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2} & -\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \\ \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i} & \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2} \end{bmatrix}\overset{(30)}{=}\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

として，再度 $e^{tJ}=R(t)$ が得られる．ただし，最後に(29)を逆に解いた

$$\cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \qquad \sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \tag{30}$$

を用いた．三角関数と指数関数を結ぶこれらの式(29), (30)はオイラーによるものである[3)]．

(28)の驚きを反省しておこう．ふりかえると，回転行列 $R(t)$ は複素数 $\cos t+i\sin t$ 倍の行列表示であった．また，$i$ 倍(90 度回転！)の行列表示が $J$ であった(§2.3)．

よって(28)の $e^{tJ}=R(t)$ は，$e^{it}=\cos t+i\sin t$ の行列表示（$i$ が $J$ にかわる！)と考えれば自然である．

次章からは，よりサイズの大きい行列やベクトルを扱おう．

## 道案内

1）座標をとりかえると，距離を表す式も一般には $\sqrt{x^2+y^2}$ ではなくなる．距離が変われば内積(3)も変わる．転置行列は(4)で特徴づけられたので，通常の基本ベクトルを正規直交基底とした内積を決めて，$B={}^tB$ という条件はきまっている．よって「対称行列で表されるような1次変換」という言いかたは，内積を決めないと意味がない．

2）$f(x)=\cos x$ に対し $f'(x)=-\sin x$，$f''(x)=-\cos x$，$f'''(x)=\sin(x)$，$f''''(x)=\cos x$ で，以下繰り返しになる．よって $f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=0$，$f'''(0)=-1$，$\cdots$．これより $\cos x$ に対するテイラー展開(7)($x_0=0$)は(25)となる．sin についても同様．これらのテイラー展開，および複素数 $z$ の指数関数 $e^z$ については，高木貞治『解析概論』(岩波書店)第4章などを参照のこと．

行列の指数関数は13章，16章でもあらためて論ずる．ちなみにテーラー展開もよくみれば指数関数にみえてくる：$D=\dfrac{d}{dx}$ とすれば，(7)の右辺は

$$f(x_0)+x(Df)(x_0)+\frac{x^2}{2!}(D^2f)(x_0)+\frac{x^3}{3!}(D^3f)(x_0)+\cdots$$
$$=\left((1+xD+\frac{(xD)^2}{2}+\frac{(xD)^3}{3!}+\cdots)f\right)(x_0)$$

つまり $f(x_0+x)=(e^{xD}f)(x_0)$．(右辺は「$f$ に微分 $D$ を施して $x_0$ を代入する」を表す $(Df)(x_0)$ にならって書いた)．テーラー展開とは「目に見える移動 ($+x$)」が「無限小移動(微分 $D=d/dx$)」の指数関数という式である．

3）オイラーの原著(1748)が翻訳されており，導出の過程を日本語で読むことができる：L. Euler 著(高瀬正仁訳)『オイラーの無限解析』海鳴社(2001)，とくに第9章．

4）本章でせっかく調べた微分方程式の応用について述べることができなかった．微分方程式のすぐれた入門である次の書(とくに下巻第4章)では，「硫黄島の戦闘」「ベトナム和平交渉」などの歴史的話題についても，微分方程式の観点から解説されている．大いに興味をもって読めるであろう．

M. ブラウン著，一楽茂雄・河原正晴・河原雅子・一楽祥子訳『微分方程式——その数学と応用(上，下)』シュプリンガー・フェアラーク東京(2001)

## 練習問題

**5-1**　2次の実対称行列 $A, B$ がともに正定値なら $A+B$ も正定値であることを示せ．

**5-2**　全平面で定義された次の関数 $f=f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．

（i）　$f=5x^2-6xy+5y^2-8\sqrt{5}(x-y)$

（ii）　$f=x^2+xy-2y^2-5x+2y$

**5-3**　次の $A$ に対し，微分方程式 $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{v}(t)=A\boldsymbol{v}(t)$ の解 $\boldsymbol{v}(t)$ を $\boldsymbol{v}(0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ の下に求めよ．また軌跡の方程式を求めよ．

（i）　$A=\begin{bmatrix}2&0\\0&-1\end{bmatrix}$　（ii）　$\begin{bmatrix}0&2\\-2&0\end{bmatrix}$　（iii）　$\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$

**5-4**　以下の $A$ に対し必要に応じ場合分けを行ない，$\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{v}(t)=A\boldsymbol{v}(t)$ の解曲線の概形を初期値 $\boldsymbol{v}(0)$ をいろいろに変えて描け．

（i）　$A=\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\mu\end{bmatrix}$　（ii）　$A=\begin{bmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{bmatrix}$

**5-5**　2次の実行列 $A$ は固有値が実数でなく，実の範囲で対角化できないとする．

（i）　ある実行列 $P$ により，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\-\beta&\alpha\end{bmatrix}$（$\alpha, \beta$ は実数）とできることを示せ．

（ii）　初期値 $\boldsymbol{v}(0)\neq\boldsymbol{0}$ のとき，$\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{v}(t)=A\boldsymbol{v}(t)$ の解曲線の概形を描け．

# [第二部 基本編]

## 線型写像・次元・行列式

# 6章：多成分ベクトルと線型写像

多成分のベクトルを扱うにあたって，「3成分は3次元で空間ベクトルとすると，4成分以上のベクトルとは一体何か？」という問いがありうる．しかし2成分でも，成分が複素数ならば図示できない．それでも実ベクトルの経験の延長上で「道具」として使えるわけである．多成分のベクトルでも同様で，図に描けなくてもある程度今までの感覚が働く世界ができることに意味がある．数(スカラー)の範囲も，四則演算ができれば何でもよいが，とりあえず実数全体 $\boldsymbol{R}$ としよう．

## 6.1　数ベクトル空間

$n$ 個の数を縦にならべたものを $n$ 成分の列ベクトル(縦ベクトル)とよび，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ などと書く．数 $x_1, \cdots, x_n$ を $\boldsymbol{x}$ の第 $1, \cdots,$ 第 $n$ 成分とよぶ．2つのベクトルが等しいとは，成分がすべて(順番もこめて)等しいことをいう．$n$ 成分の行(横)ベクトル $[x_1, \cdots, x_n]$ も同様に考えるが，以下おもに列(縦)ベクトルが登場する．

ベクトルの和と $k$ 倍 $(k \in \boldsymbol{R})$ が

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}:=\begin{bmatrix} x_1+x_1' \\ \vdots \\ x_n+x_n' \end{bmatrix}, \qquad k\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}:=\begin{bmatrix} kx_1 \\ \vdots \\ kx_n \end{bmatrix}$$

で定められる．すべての成分が0のゼロベクトルを $\boldsymbol{0}$ と書くと，$(-1)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$．そこで $(-1)\boldsymbol{x}$ を $-\boldsymbol{x}$ と書き，$\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ と書くなども，2成分(平面)のときと同様である．平面ベクトルの全体を $\boldsymbol{R}^2$ で表したように，$n$ 成分ベクトルの全体を $\boldsymbol{R}^n$ と書き，$n$ 成分**数ベクトル空間**とよぼう．$\boldsymbol{R}^n$ の任意の元 $\boldsymbol{x}$ は，

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

により，**基本ベクトル**

$$e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad e_n := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

を用いた1次結合で一通りに表される：

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n. \tag{2}$$

---

**注**　列ベクトルを主に考えるのは，行列を主に左からかけることによる．なお，紙面の節約のため「縦横をひっくり返す」転置の操作を使い，行ベクトルを転置した ${}^t[x_1, \cdots, x_n]$ で列ベクトルを表すことがある．

成分の数 $n$ は $\boldsymbol{R}^n$ の次元とよんでよいが，次元については9章で改めて考える．成分が増えても代数的には今までの感覚で(しかるべく)扱えばよい．ただし，幾何的には(たとえば)4次元では2平面が一点で交わる，などということもおこる．

---

## 6.2　行列とその演算

$m$ と $n$ を自然数とする．$mn$ 個の数を縦 $m\times$ 横 $n$ の長方形に並べたものを$(m, n)$型行列といい，とくに$(n, n)$型のものを $n$ 次正方行列とよぶ．

$$\begin{array}{c} \\ \text{第}1\text{行} \\ \vdots \\ \text{第}i\text{行} \\ \vdots \\ \text{第}m\text{行} \end{array} \begin{array}{c} \text{第}1\text{列} \cdots \text{第}j\text{列} \cdots \text{第}n\text{列} \\ \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \end{array} = A \tag{3}$$

添字の付け方もこれが標準的で(慣れておこう)，$a_{i,j}$ を $A$ の$(i, j)$成分とか $i$ 行 $j$ 列成分とよぶ．2つの行列が等しいとは，長方形のサイズが等しく，対応する成分がすべて等しいことをいう．実数を成分とする$(m, n)$型行列全体を $M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ で表す($M$ = Matrix)．

---

**注**　$(m, n)$型行列のことを $m$ by $n$ matrix，$(m, n)$行列，$m$ 行 $n$ 列行列，$m\times n$ 行列ともいう．また成分を表す際，誤解のおそれがない限り添字のコンマを略し，$a_{i,j}$ を $a_{ij}$ とも書く．そこで(3)は $A = [a_{i,j}]_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n}$ とか $A = [a_{i,j}]$ とも略記される．同様にベクトルも $\boldsymbol{x} = [x_j]_{1\leq j\leq n}$ とか $\boldsymbol{x} = [x_j]$ などと書くことがある．

---

**行列の和とスカラー倍**　ベクトルと同様，同じサイズの行列の和が成分ごとの和で定義される．スカラー倍もベクトルと同様に定義される．

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \vdots & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

行列のスカラー倍も同様で，$k \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$k\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ & \vdots & \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

**行列とベクトルの積**　(3)の$(m, n)$型行列 $A$ を，列ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ($n$ 成分であることに注意)に掛けることができる：

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}. \tag{4}$$

$A\boldsymbol{x}$ の第 $i$ 成分を $(A\boldsymbol{x})_i$ と表せば

$$(A\boldsymbol{x})_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \tag{5}$$

である．$A$ の第 $1, \cdots,$ 第 $n$ 列ベクトルを

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

と書けば，$A\boldsymbol{x}$ はこれらの和(1次結合)であり

$$A\boldsymbol{x} = x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \tag{6}$$

である．そこで2次正方行列のときと同じく，行列を

$$A = [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n] \tag{7}$$

のように，列ベクトルのあつまりと見るのがよい．

**行列と行列の積**　行列 $A$ の横幅と $B$ の「縦幅」が同じときのみ積 $AB$ は定義され，

$$AB := [A\boldsymbol{b}_1, \cdots, A\boldsymbol{b}_n]. \qquad (B = [\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n] \text{ のとき}) \tag{8}$$

とくに $n=1$ なら，これは行列と列ベクトルの積である．$A$ が$(l, m)$型，$B$ が$(m, n)$型としよう．

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1m} \\ \vdots \\ a_{l1} \cdots a_{lm} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} \cdots b_{1n} \\ \vdots \\ b_{m1} \cdots b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= [a_{i,j}]_{1 \leqq i \leqq l, 1 \leqq j \leqq m} \qquad = [b_{j,k}]_{1 \leqq j \leqq m, 1 \leqq k \leqq n}$$

すると積 $AB$ は$(l, n)$型で，$(i, k)$成分 $(AB)_{i,k}$ は次のとおりとなる．

$$(AB)_{i,k} = (A\boldsymbol{b}_k)_i = a_{i,1}b_{1,k} + \cdots + a_{i,m}b_{m,k}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}b_{j,k} \quad (i = 1, \cdots, l, \ \ k = 1, \cdots, n)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ & \vdots & \\ [a_{i1} & \cdots & a_{im}] \\ & \vdots & \\ a_{l1} & \cdots & a_{lm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & & \begin{bmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{bmatrix} & & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & & & & b_{mn} \end{bmatrix}$$

図1　$(AB)_{i,k}$ は $A$ の第 $i$ 行と $B$ の第 $k$ 列の積和

2次のとき(§2.1)と同じく，行列の積は

$$A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x} \tag{9}$$

のように作ったのだが，次節であらためて説明しよう．

**問**　(i)　$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ とする．$AB, BA$ を求めよ．

(ii)　$AB, BA$ がともに定まりサイズも同じでも，一般に等しいとは限らない(異なるのが普通)．そのような3次行列 $A, B$ の例をあげよ．

(iii)　正方行列 $C = [C_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ に対し，$\mathrm{tr}C = C_{11} + \cdots + C_{nn}$ を $C$ の**トレース**とよぶ．$AB$ が定まり正方行列であれば，$BA$ も正方行列で

$$\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}BA$$

が成り立つことを示せ．

## 6.3　線型写像とその行列表示

2次行列では1,2章に見たとおり，行列とベクトルの積は1次式で書ける写像と見るのが自然である．

**定義5**　数ベクトル空間の間の写像 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ が**線型写像**であるとは，次の線型性の条件(ベクトルの $k$ 倍を $k$ 倍に，和を和にうつす)

$$f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x}) \tag{10}$$

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}) \tag{11}$$

(任意の $k \in \boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して)をみたすことをいう．　□

平面の1次変換のとき($n = m = 2$, §1.4)と同じで，線型性は $f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}$ の成分の1次式で表せることを意味する．実際

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &\overset{(2)}{=} f(x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n) \overset{(11)}{=} f(x_1\boldsymbol{e}_1)+\cdots+f(x_n\boldsymbol{e}_n) \\ &\overset{(10)}{=} x_1f(\boldsymbol{e}_1)+\cdots+x_nf(\boldsymbol{e}_n) \end{aligned} \tag{12}$$

となり，$f(\boldsymbol{x})$ は $x_1, \cdots, x_n$ の1次式である．さらに

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}_1,\ \cdots,\ f(\boldsymbol{e}_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}_n$$

と書き，$A = [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n]$ とすれば

$$(12) = x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n \overset{(6)}{=} [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n]\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}. \tag{13}$$

すなわち，$f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, \cdots, x_n]$ の $A$ 倍と書けた．むしろ**そのように行列とベクトルの積を定めた**わけである[1)]．

**問**　(i)　(12), (13)の変形を確かめよ．

(ii)　写像 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ を $f(x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n) := x_2\boldsymbol{e}_1+x_3\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_{n-1}+x_1\boldsymbol{e}_n$ で定める．$f$ が線型写像であることを示し，$f$ を表す行列 $A$ ($f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$) を求めよ．

$A = [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n] = [f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)]$ だから，線型写像は基本ベクトル

$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の像 $f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)$ できまる．平面の１次変換のときと同様，線型写像 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ と行列 $A \in M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ が１対１に対応する．

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \overset{1\text{対}1\text{対応}}{\longleftrightarrow} A = [f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)] \tag{14}$$

ここで $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ には（$n$ 行 $m$ 列でなく）$m$ 行 $n$ 列の行列が対応することに注意．$A\boldsymbol{x}$ が定義できるか考えれば間違えないだろう．

行列の積についても，平面の１次変換の場合とまったく同じで，線型写像２つの合成を表す行列とみると自然である．２つの線型写像

$$g: \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{R}^m, \qquad f: \boldsymbol{R}^m \longrightarrow \boldsymbol{R}^l$$

があったとする．この合成

$$f\circ g: \boldsymbol{R}^n \overset{g}{\longrightarrow} \boldsymbol{R}^m \overset{f}{\longrightarrow} \boldsymbol{R}^l \qquad (\boldsymbol{x} \mapsto g(\boldsymbol{x}) \mapsto f(g(\boldsymbol{x})))$$

を表示するデータ（行列）を，$g, f$ を表すデータ

$$B = [g(\boldsymbol{e}_1), \cdots, g(\boldsymbol{e}_n)], \qquad A = [f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}_m)]$$
$$(g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x},\ \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n) \qquad (f(\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{y},\ \ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^m)$$

で書こう．$f\circ g(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f\circ g(\boldsymbol{e}_n)$ がわかればよいが，$g(\boldsymbol{e}_k)$（$= B$の第 $k$ 列）$= \boldsymbol{b}_k$ と書けば

$$[f\circ g(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f\circ g(\boldsymbol{e}_n)] = [f(g(\boldsymbol{e}_1)), \cdots, f(g(\boldsymbol{e}_n))]$$
$$= [f(\boldsymbol{b}_1), \cdots, f(\boldsymbol{b}_n)] = [A\boldsymbol{b}_1, \cdots, A\boldsymbol{b}_n]$$

である．したがってすべての $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対し

$$(f\circ g)(\boldsymbol{x}) = [A\boldsymbol{b}_1, \cdots, A\boldsymbol{b}_n]\boldsymbol{x}.$$

一方 $(f\circ g)(\boldsymbol{x}) = f(g(\boldsymbol{x})) = A(B\boldsymbol{x})$ だが，これを（(9)のように）

$$(f\circ g)(\boldsymbol{x}) = (AB)(\boldsymbol{x})$$

と書くには $AB := [A\boldsymbol{b}_1, \cdots, A\boldsymbol{b}_n]$ とするしかない．

---

**注**　３つ（以上）の積についての結合律 $(AB)C = A(BC)$ も，線型写像の合成として自然に理解できる（２次行列のとき（２章）とまったく同じ！）．

また行列の和についても，$A+B$ はすべての $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{x} = (A+B)\boldsymbol{x}$ をみたすものと言うことができる．

---

## 6.4　いろいろな行列

$n$ 次の**単位行列**(unit matrix)　次の $n$ 次の正方行列をいう．

$$E=\begin{bmatrix}1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & 1\end{bmatrix}\qquad (E_n,1_n,1\ \text{とも書く})$$

$E$ の成分は**主対角線**$(1,1),(2,2),\cdots$上の**対角成分**が 1 のほかはすべて 0 で，たくさんの 0 を上のように略すことも多い．$E$ を単に 1 と書くのは(2 次のときと同様に)$E\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n)$ であることによる(すなわち，$E$ は恒等写像 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$(§1.6 エ)を表している)．すべての行列 $A,B$ に対し，積を考えられる限り $AE=A$，$EB=B$ である．

2 次行列のときと同じく，正方行列 $A$ に対し

$$AB=E,\qquad BA=E$$

である $B$ を $A$ の**逆行列**とよび，$A^{-1}$ と書く．$A$ が定める線型写像 $f(\boldsymbol{v})=A\boldsymbol{v}$ の逆写像にあたるが，もちろんいつも逆行列があるとは限らない．

**零行列**　すべての成分が 0 の行列で，$O$ と表す．

**行列単位**　$(i,j)$成分が 1，他は 0 の$(m,n)$型行列を，$E_{i,j}$ と書く．

$$E_{i,j}:=i)\begin{bmatrix}0 & \cdots & \overset{j}{\smile}\!\!\!\!0 & \cdots & 0\\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0\\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\in M_{m,n}(\boldsymbol{R})\qquad \begin{pmatrix}1\leqq i\leqq m\\ 1\leqq j\leqq n\end{pmatrix}$$

$E_{i,j}$ を$(i,j)$-行列単位(matrix unit)とよぶ．これらは基本ベクトル(1)にあたり，任意の $A=[a_{i,j}]_{1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq n}$ は

$$A=\sum_{1\leqq i\leqq m,\ 1\leqq j\leqq n}a_{i,j}E_{i,j}$$

と一通りに表せる．行列単位どうしの積は(サイズが合い，積をとれれば)

$$E_{i,j}E_{j',k}=\delta_{j,j'}E_{i,k}\qquad \text{ただし}\quad \delta_{j,j'}:=\begin{cases}1 & (j=j')\\ 0 & (j\neq j')\end{cases}$$

である(確かめよう)．$\delta_{j,j'}$ は**クロネッカーのデルタ**とよばれ，$j=j'$ のと

き 1，それ以外の場合には 0 を表す記号である．

**対角行列**(diagonal matrix)　対角成分以外は 0 の正方行列をいう．

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

節約して $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ と表すことも多い(diagonal = 対角線)．対角行列どうしは，和も積もまた対角行列である．たとえば

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n) = \mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1, \cdots, \lambda_n\mu_n). \tag{15}$$

**上三角行列，下三角行列**(upper/lower triangular matrix)　それぞれ，次の形の正方行列のことをいう．ただし $*$ は何が入っていてもよい(0 でもよい)ことを示す．

$$\begin{bmatrix} * & * & & \cdots & * \\ 0 & * & & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} * & 0 & & \cdots & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & & * & * \end{bmatrix}$$

上三角行列の和や積もまた上三角であり，下三角行列についても同様である．じつは逆行列も，あれば(上または下)三角である(練習問題 8-2 参照)．

**転置行列**　$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$ の転置行列を ${}^tA := \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{m,1} \\ & \vdots & \\ a_{1,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$ で定める．2 次行列のときと同様だが，$A$ が$(m, n)$型なら ${}^tA$ は$(n, m)$型である(列ベクトルが行ベクトルにうつる)．$A, B$ の積 $AB$ が存在すれば ${}^tB{}^tA$ も存在し，2 次のとき(§ 3.3 の問)と同様に次が成り立つ：

$${}^t(AB) = {}^tB{}^tA. \tag{16}$$

**問**　(i)　(15), (16) を確かめよ．

(ii)　上三角行列の積が上三角行列であることを確かめよ．

## 6.5 スカラーの範囲が実数でない場合

以上の演算で，数(スカラー)の範囲を複素数としても何も困らない．すなわち，**複素(列)ベクトル空間**

$$\boldsymbol{C}^n = \{{}^t[x_1, \cdots, x_n] \mid x_1, \cdots, x_n \in \boldsymbol{C}\}$$

においても，ベクトルの和やスカラー倍が考えられる．(スカラー倍は，各成分の複素数倍である．)　複素数を成分とする$(m, n)$型行列全体を$M_{m,n}(\boldsymbol{C})$と表す．複素ベクトル空間の間の写像$f: \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^m$で線型性の条件を($\boldsymbol{C}$をスカラーの範囲として，すなわち(10)を$k \in \boldsymbol{C}$として)みたすものの行列表示を与えるのが，行列$A \in M_{m,n}(\boldsymbol{C})$ということになる．一般に集合$\boldsymbol{K}$に加減乗除が定義されていれば(体(たい)という：付録1)，$\boldsymbol{K}^n$や$M_{m,n}(\boldsymbol{K})$に同様の演算が考えられる．(ただしベクトルの「長さ」は「正の数」が一般には意味をもたず考えられるとは限らない：次節の注．)

---

**注**　逆に数の範囲を狭くして，たとえば成分を有理数のみとしたベクトル空間$\boldsymbol{R}^n$を考えることができる．このときは，スカラー倍は有理数倍のみとしないと結果がもとのベクトルの仲間からはみでてしまう(演算が閉じない)．数の範囲とは，ベクトルや行列の成分として何を許すかということだが，これは(基本ベクトルに何を掛けることを許すかという点で)スカラー倍の範囲を決めることと同じである．

また，最も一般にベクトルを考えようと思うと，数とは何かを考える必要がある．整数の集合では割り算が自由にできず不便であった．同様に0でないスカラー倍($k$倍)については逆演算($1/k$倍)もほしいというのが，割り算もこめた四則を要請する意味である[2)]．

---

## 6.6 ユークリッド空間，長さと内積

一般論をひとまず終えて，残りで空間$\boldsymbol{R}^3$の回転を考えてみたい．回転は素朴には，「1点を中心とし」「中心からの距離を変えない」変換である．平面ベクトル$\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, x_2] \in \boldsymbol{R}^2$の長さを$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$とするのと同様，$\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, x_2, x_3] \in \boldsymbol{R}^3$の長さを$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$と考えよう(図2)．

長さの測り方がこのように指定されているとき，$\boldsymbol{R}^3$を**3次元ユークリッド空間**とよぶ．(誤解のおそれがなければ単に空間とよぶ．)

---

§5.2で用いたように，長さを変える変換も便利なことは多い．ひいては長さの測り方もその場ごとに違いうるので，誤解のないように宣言すると考えよう．

---

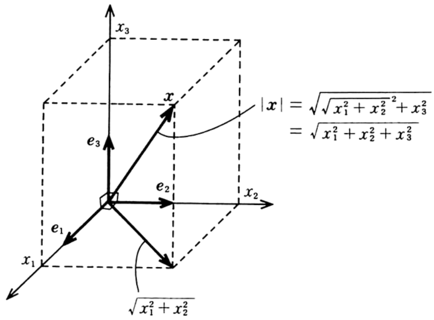



図2　空間ベクトルの長さ

(ユークリッド)空間のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3$ の**内積**も，長さとの関係が平面のときと同じとすれば

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \frac{1}{2}(|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2-|\boldsymbol{x}|^2-|\boldsymbol{y}|^2) \tag{17}$$

で定めるべきだろう．すると

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} \tag{18}$$

である(確かめよう)．定義式(17)より，長さを保つ変換(たとえば，回転)では内積も保たれることに注意．

平面のときは，内積と角度に次の関係があった．

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\theta \tag{19}$$

$\theta$ は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の間の角度で，どちら向きに測るかで符号がつくが，cos の中なので問題ない．これは余弦定理という三角形の性質に基いていたから，空間でも内積(17)について同じ性質(19)が成り立つ．

**(19)の別証**　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3$ をある回転 $f$ で $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ がなす $x_1x_2$ 平面にうつそう(図3)．内積(17)は，$|f(\boldsymbol{x})| = |\boldsymbol{x}|$ などより回転で不変である：

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})). \tag{20}$$

すると $f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})$ は平面ベクトルなので，(19)が成り立っている：

$$(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = |f(\boldsymbol{x})||f(\boldsymbol{y})|\cos\theta'. \tag{21}$$

$\theta'$ は $f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})$ がなす角であり $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ のなす角 $\theta$ に等しい．$|f(\boldsymbol{x})| =$

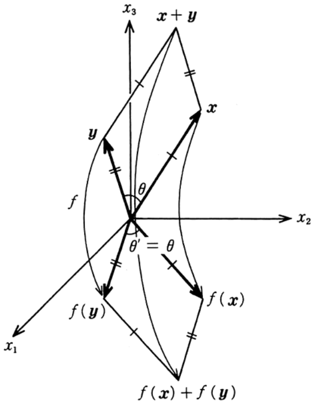



**図 3** 回転で $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を平面 $x_3 = 0$ にうつす

$|\boldsymbol{x}|$, $|f(\boldsymbol{y})| = |\boldsymbol{y}|$ とあわせ，(19)は空間ベクトルでも成り立つ． □

---

**注** 同様に考えれば，$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ で長さを測る $n$ **次元ユークリッド空間**でも，内積を(17)で定め 2 つのベクトルの間の角(の大きさ)を(19)で考えることができる．

一方複素ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^n$ では，(18)の $n$ 成分化で定義した内積は $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ という正値性をみたさない(たとえば $\boldsymbol{x} = {}^t[i, 0]$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = i^2 + 0^2 = -1$ である)．よって$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$の平方根としては正の長さを定義できない．(ただし「すべての $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n$ に対し$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=0$ ならば，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$」(非退化性)は成り立ち，これだけでも使い出はある)．そこで $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ にするために，あらためて

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := {}^t\bar{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y} = \bar{x}_1 y_1 + \cdots + \bar{x}_n y_n \tag{22}$$

(一方の複素共役をとる)と定める．これを**エルミート内積**とよぶ(§ 10.3, § 15.1)．

---

**問** (i) 3 辺が $a, b, c$ の三角形において辺 $a, b$ のなす角を $\theta$ とする．余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ と(19)との関係を説明せよ．

(ii) $k$ は実数とする．空間のベクトル $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ に対し，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = k$ をみたす $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ の全体はどのような図形をなすか．

## 6.7 空間の回転を表す行列

さて空間でも(図3のように)，回転は平行四辺形を合同な平行四辺形にうつす．平面の回転(1章)のときと同様，これは原点を中心とする回転が線型写像(1次変換)であることを示し，行列で表せることを意味する．

---

回転とは，ここでは原点からの距離を変えず，「向き」も変えない(右手系を右手系にうつす)変換と考えよう(くわしくは§7.4)．すると距離を保つことから，平行四辺形の各頂点相互の位置関係は回転したあとでも同じ(合同)となる．

---

$z$軸($x_3$軸)を回転軸とする角$\theta$の回転$Z_\theta$は，高さを変えず，$xy$平面($x_1x_2$平面)ではこれまでと同じなので，次の行列で表される．

$$Z_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

$y$軸($x_2$軸)を回転軸とする$Y_\theta$についても(図4)，基本ベクトルの像が

$$Y_\theta(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{bmatrix}, \quad Y_\theta(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y_\theta(\boldsymbol{e}_3) = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

であることから((14)の原理により)

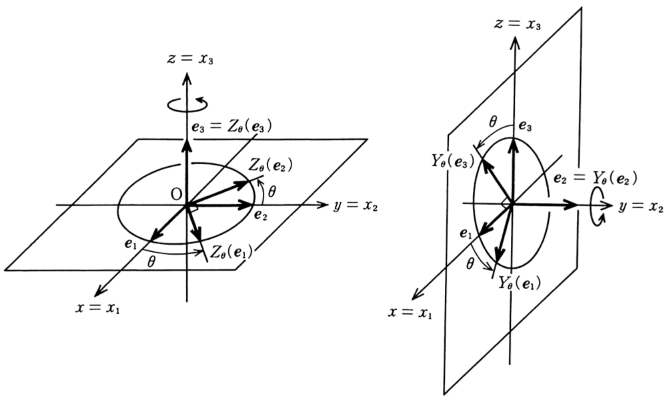



**図4**　右手系での$z$軸，$y$軸を回転軸とする回転$Z_\theta$, $Y_\theta$．回転角$\theta$はそれぞれの軸の正の方向から見て反時計回りで考える．

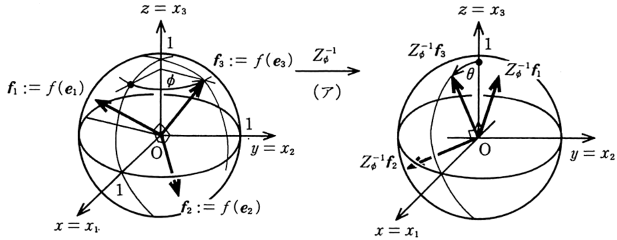



**図5**　回転のオイラー角

$$Y_\theta = [\,Y_\theta(\boldsymbol{e}_1),\ Y_\theta(\boldsymbol{e}_2),\ Y_\theta(\boldsymbol{e}_3)\,] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{24}$$

$x$ 軸($x_1$ 軸)が回転軸でも同様だが，一般の回転はどう表せるだろう？そこでオイラー角の方法を紹介する．

空間 $\boldsymbol{R}^3$ の基本単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を，回転 $f$ で回す．すると像 $f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3)$ はやはり互いに直交する長さ 1 のベクトルとなる(図 5 左)．さて $f(\boldsymbol{e}_3)$ に注目すると，$Z_\phi$ $(0 \leqq \phi \leqq 2\pi)$（$\phi$：ファイ）を用いて

$$Z_\phi^{-1} f(\boldsymbol{e}_3) = Z_{-\phi} f(\boldsymbol{e}_3)$$

が $xz$ 平面の $x \geqq 0$ の部分にあるようにできる(図 5 ア)．さらに $y$ 軸中心の，角 $\theta$ の回転 $Y_\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ で

$$Y_\theta^{-1} Z_\phi^{-1} f(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_3$$

とできる(図 5 イ)．このとき，ふたつのベクトル

$$Y_\theta^{-1} Z_\phi^{-1} f(\boldsymbol{e}_1), \qquad Y_\theta^{-1} Z_\phi^{-1} f(\boldsymbol{e}_2)$$

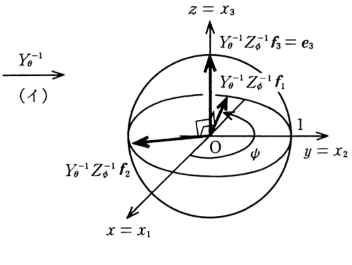
は $\boldsymbol{e}_3$ と直交するから $xy$ 平面内にあり，互いに直交する．$z$ 軸を中心とする回転 $Z_\psi$ の逆回転で

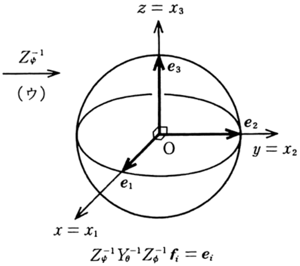
$$Z_\psi^{-1} Y_\theta^{-1} Z_\phi^{-1} f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2 \qquad (0 \leqq \psi < 2\pi)$$

（$\psi$：プサイ）とすれば，このとき $\boldsymbol{e}_3$ は動かない $(Z_\psi^{-1} Y_\theta^{-1} Z_\phi^{-1} f(\boldsymbol{e}_3) = Z_\psi^{-1}\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3)$．ゆえにこれらと直交するものとして

$$Z_\psi^{-1} Y_\theta^{-1} Z_\phi^{-1} f(\boldsymbol{e}_1) = k\boldsymbol{e}_1$$

だが，向きと長さを考え $k = 1$，つまり $i = 1, 2, 3$ いずれについても $Z_\psi^{-1} Y_\theta^{-1} Z_\phi^{-1} f(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_i$ (図 5 右)．逆行列(＝逆回転)を次々と掛ければ




$f(\boldsymbol{e}_i) = Z_\phi Y_\theta Z_\psi \boldsymbol{e}_i$. よってすべてのベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して

$$f(\boldsymbol{v}) = Z_\phi Y_\theta Z_\psi \boldsymbol{v}. \tag{25}$$

つまり，空間 $\boldsymbol{R}^3$ の任意の回転 $f$ は 3 つの連続パラメータ $\psi, \theta, \phi$ で表される．$(\phi, \theta, \psi)$ を回転 $f$ の**オイラー角**とよぶ．(25)の右辺の行列の積

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

を計算すれば，それが一般の回転を表す行列である．

オイラー角$(\phi, \theta, \psi)$をもつ回転 $f$ に対し，$\cos\theta$ は $f(\boldsymbol{e}_3)$ の高さ(緯度)を表している．($Z_\psi Y_\theta Z_\phi \boldsymbol{e}_3$ が球面上のどの位置にあるかを考えよ.) また $\theta \neq 0, \pi$ なら，$f$ に対してそのオイラー角$(\phi, \theta, \psi)$が$(0 < \theta < \pi,\ 0 \leqq \psi,\ \phi < 2\pi$ で) 一通りにきまる．これも(計算で)確かめられる．

もちろん $Y_\theta Y_{\theta'} = Y_{\theta+\theta'} = Y_{\theta'} Y_\theta$ が成り立ち，$Z_\theta$ についても同様．しかし異なる軸のまわりの回転の合成では，たとえば $Z_\theta Y_\phi = Y_\phi Z_\theta$ は $\theta, \phi$ とも $\pi$ の整数倍のとき以外成り立たない($\theta = \phi = \pi/2$ のときが，石板を二通りに倒す 0 章の話)．したがって $Z_\theta Y_\phi Z_\psi$ と $Z_{\theta'} Y_{\phi'} Z_{\psi'}$ の積(回転の合成)も単純ではない．これは空間の回転と平面の回転との大きな違いである．

**問** (i) (26)の積を計算せよ．

(ii) $\theta, \phi$ がともに $\pi$ の整数倍でないとき，$Z_\phi Y_\theta \neq Y_\theta Z_\phi$ を示せ．

## 道案内

1）慣例にしたがいベクトル $\boldsymbol{a}$ のスカラー $x$ 倍を $x\boldsymbol{a}$ と記しているが，(13)などを見ると $\boldsymbol{a}x$ の方が自然な気もするところである．(実際非可換な「数」が成分の際はそうすべきである.)

2）最も一般的なベクトル空間の定義を 14 章で述べる：視覚的な矢印や本章の $n$ 成分ベクトルに限らず，さらに一般に「和」と「スカラー倍」が考えられる集合をベクトル空間とよぶのが便利である．幾何的な立場を離れ「つき離して」考えると，単なる数の集まりにどう長さを考えるかは明らかとはいえないが，一般のベクトル空間ではさらにそうである．そこで「長さ」とは何かを考えた上で，これを定めたベクトル空間(ユークリッド空間など)を計量ベクトル空間などとよぶこともある．こうした背景もあるので，第 2 部では「目に見える」長さや角度などによらない議論に慣れるのも 1 つの目標である．

## 練習問題

**6-1**　以下の線型写像 $f_ア$，$f_イ$，$f_ウ$：$\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ を行列で表せ．

ア）$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \overset{f_ア}{\longmapsto} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad (m < n)$　　イ）$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \overset{f_イ}{\longmapsto} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (m > n)$

ウ）$1 \leqq i \leqq m$，$1 \leqq j \leqq n$ とするとき，$f_ウ(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_j\boldsymbol{e}_j + \cdots + x_m\boldsymbol{e}_m) := x_j\boldsymbol{e}_i$.

**6-2**　次の正方行列 $A$ について，$A^m$ $(m = 1, 2, \cdots)$ を計算せよ．

(i) $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix}$　(ii) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$　(iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & O \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & 0 \end{bmatrix}$ ($n$ 次)

**6-3**　大きな行列を豆腐を切り分けたようにみることを行列の区分けという：

$$\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_M \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_N \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & B_1 & \cdots & C_1 \\ \hline A_2 & B_2 & \cdots & C_2 \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline A_M & B_M & \cdots & C_M \end{array}\right] \end{array}$$

（全体で $(m, n)$ 型とするとき
$n_1+n_2+\cdots+n_N = n$,
$m_1+m_2+\cdots+m_M = m$,
$A_1$ は $(m_1, n_1)$ 型，$B_1$ は $(m_1, n_2)$ 型，
$\cdots$，$C_M$ は $(m_M, n_N)$ 型．
$A_1, \cdots, C_M$ をこの行列の**小行列**という．）

（i）　2つの3次行列を次のように区分けする．

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ \hline c_1 & c_2 & d \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & d \end{bmatrix}, \quad \left[\begin{array}{cc|c} a_{11}' & a_{12}' & b_1' \\ a_{21}' & a_{22}' & b_2' \\ \hline c_1' & c_2' & d' \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A' & \boldsymbol{b}' \\ \boldsymbol{c}' & d' \end{bmatrix}$$

（$A, A'$ は2次正方，$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}'$ は2成分列ベクトル，$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}'$ は2成分行ベクトル，$d, d'$ は数．）

このとき $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' & \boldsymbol{b}' \\ \boldsymbol{c}' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA'+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}' & A\boldsymbol{b}'+\boldsymbol{b}d' \\ \boldsymbol{c}A' & \boldsymbol{c}\boldsymbol{b}'+dd' \end{bmatrix}$ を示せ．

（ii）　$X = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mu \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \lambda E & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \mu \end{bmatrix}$ に対し，$XY = YX$ をみたす3次行列 $Y$ をすべて求めよ．（$Y$ に(i)のような区分けを用いよ．）

**6-4**　（i）　ユークリッド空間において，$x$ 軸を中心とする角 $\alpha$ の回転を表す行列 $X_\alpha$ を求めよ．（角 $\alpha$ は，$y$ 軸の正の方向を $z$ 軸の正の方向に一致する方向を正と考える．）また，$X_\alpha$ のオイラー角表示 $X_\alpha = Z_\phi Y_\theta Z_\psi$ を求めよ．

（ii）　空間の回転を表す行列 $R$ に対し，${}^tRR = E$ であることを示せ．

（iii）　回転 $f$ のオイラー角 $(\phi, \theta, \psi)$ が，$f(\boldsymbol{e}_3) \neq \boldsymbol{e}_3$ のとき一通りにきまることを示せ．ただし $0 < \theta < \pi$，$0 \leqq \psi < 2\pi$，$0 \leqq \phi < 2\pi$ とする．

**6-5**　（i）　任意の写像について，逆写像はあれば1つであることを示せ．

（ii）　線型写像 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ が逆写像をもてば，やはり線型であることを示せ．

（iii）　$A, B$ を同じサイズの可逆な正方行列とする．$AB$ の逆が $B^{-1}A^{-1}$ であることを示せ．また ${}^tA$ も可逆であり，$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ であることを示せ．

# 7章：空間の幾何

すでに第1部で数列や微分方程式の問題に使ってみた通り(4章)，ベクトルはつねに幾何的対象というわけではなく，たし算とスカラー倍が考えられる量はすべてベクトルとして扱える．

一方，素朴な感覚ももちろん大事である．ここで空間 $\boldsymbol{R}^3$ の幾何についてまとめておこう[1)]．なお $\boldsymbol{R}^3$ をユークリッド空間とよぶときは基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が長さ1で互いに直交していると考えるが，§7.1～§7.2 ではこれらの仮定は不要で，斜交座標系でもまったく同様である．O で $\boldsymbol{R}^3$ の原点を表す．

## 7.1　直線

直線はその上の異なる2点できまる．2点を $\mathrm{P}(p_1, p_2, p_3)$，$\mathrm{P}'(p_1', p_2', p_3')$ とすれば，この直線上の点 $\mathrm{X}(x_1, x_2, x_3)$ は，実数 $s \in \boldsymbol{R}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\overrightarrow{\mathrm{PP'}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + s(\overrightarrow{\mathrm{OP'}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}})$$

と表される(**直線のパラメータ表示**)．成分で書けば

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} p_1' - p_1 \\ p_2' - p_2 \\ p_3' - p_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

である．一般に1点 $\mathrm{P}(p_1, p_2, p_3)$ と $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^3$ は「P を通り方向 $\boldsymbol{a}$ の」直線 $l$ を定め，その上の点 X はある実数 $s \in \boldsymbol{R}$ で

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\boldsymbol{a} \tag{2}$$

と書ける．よって直線 $l$ は，集合の記号を使えば

$$l = \{\overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\boldsymbol{a} \mid s \in \boldsymbol{R}\}$$

である．略して $l = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}$ とも書こう．$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ を $l$ の方向ベクトルとよぶ．$\boldsymbol{a} = {}^t[a_1, a_2, a_3]$ とすれば，(2)より

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + sa_1 \\ x_2 = p_2 + sa_2 \\ x_3 = p_3 + sa_3 \end{cases} \tag{3}$$

$s$ を消去すれば(簡単のため，$a_1a_2a_3 \neq 0$ とする)，$l$ を定める方程式

$$\frac{x_1-p_1}{a_1}=\frac{x_2-p_2}{a_2}=\frac{x_3-p_3}{a_3}\,(=s) \tag{4}$$

が得られる．すなわち $\dfrac{x_1-p_1}{a_1}=\dfrac{x_2-p_2}{a_2}$ かつ $\dfrac{x_2-p_2}{a_2}=\dfrac{x_3-p_3}{a_3}$ により，2 つの 1 次方程式の解の共通部分として空間の直線が表される(図 1)．

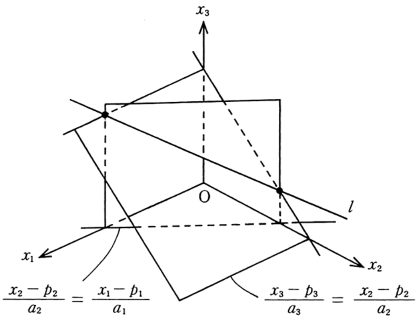



**図 1**　平面の交わりとしての直線(4)

**問**　本文で除外した $a_1=0$ のとき，および $a_1=a_2=0$ のときの直線 $l$ の方程式をそれぞれ求めよ．

## 7.2 平面

空間の平面はその上の異なる 3 点できまる．これらを $\mathrm{P}(p_1, p_2, p_3)$, $\mathrm{P}'(p_1', p_2', p_3')$, $\mathrm{P}''(p_1'', p_2'', p_3'')$ とすると，この平面上の点 $\mathrm{X}(x_1, x_2, x_3)$ は実数 $s, t\in \boldsymbol{R}$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{PP}'}+t\overrightarrow{\mathrm{PP}''}$$

と書ける(**平面のパラメータ表示**)．一般に 1 点 P を通り $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in \boldsymbol{R}^3$ の 2 方向に**張られた**平面

$$\{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}\mid s, t\in\boldsymbol{R}\}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{b}$$

が考えられる．これを $\Pi$(パイ) と書こう．つまり平面 $\Pi$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}\qquad (s, t \text{ は実数}) \tag{5}$$

と書ける点 X の全体である．

---

ここで $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方または一方が $\boldsymbol{0}$ なら，(5)が表すのは 1 点または直線になる．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ でも $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$ ならやはり直線になる．パラメータ $s, t$ がムダでなく，両者

が勝手に動くときの X の軌跡が平面とよべる拡がりをもつためには，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{0}$ でなく異なる(独立な)方向をもつという仮定が必要である．

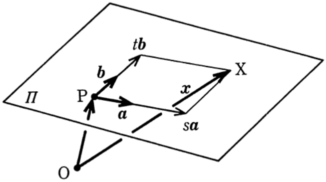



図 2　点 P を通り $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ で張られる平面 $\Pi$

平面 $\Pi$ を定める方程式を求めよう．$\boldsymbol{a} = {}^t[a_1, a_2, a_3]$，$\boldsymbol{b} = {}^t[b_1, b_2, b_3]$ とすると

$$(5) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - p_1 = sa_1 + tb_1 \\ x_2 - p_2 = sa_2 + tb_2 \\ x_3 - p_3 = sa_3 + tb_3 \end{cases} \tag{6}$$

第 1, 2 式から，$\Delta_{12} := a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ の下に

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

第 2, 3 式に代入すれば

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta_{12}} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta_{12}} \begin{bmatrix} 0 & a_1b_2 - a_2b_1 \\ a_3b_2 - a_2b_3 & a_1b_3 - a_3b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

第 1 成分は(幸い)条件を与えず，第 2 成分より

$$x_3 - p_3 = \frac{a_3b_2 - a_2b_3}{\Delta_{12}}(x_1 - p_1) + \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{\Delta_{12}}(x_2 - p_2)$$

右辺を移項し，行列式を使ってみやすくすれば

$$[\lambda, \mu, \nu] \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{bmatrix} = 0, \tag{8}$$

ただし

$$[\lambda, \mu, \nu] = \left[\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right] \tag{9}$$

である．(8)が平面 $\Pi$ 上の点 X がみたす方程式である．

---

ここで(6)から(7)への変形には $\Delta_{12} \neq 0$ が必要だが，これが 0 のときは(6)の第 1, 2 式以外の組合せを使えばよい．どの組合せでも行列式が 0 とすれば，それは $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$ (平行)を意味する(確かめよう)．

---

逆に $\lambda, \mu, \nu \in \boldsymbol{R}$ を勝手に与え，方程式(8)を考える．$\kappa := \lambda p_1 + \mu p_2 + \nu p_3$ とすれば，(8)は

$$\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 = \kappa \tag{10}$$

である．たとえば $\nu \neq 0$ なら，(10)より $x_3 = \dfrac{1}{\nu}(\kappa - \lambda x_1 - \mu x_2)$．これを

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\kappa}{\nu} \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\dfrac{\lambda}{\nu} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\dfrac{\mu}{\nu} \end{bmatrix} \qquad (x_1, x_2 \text{は任意})$$

と見れば，$x_1, x_2$ をパラメータとする平面の表示(5)とみなせる．もちろん P や $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のとりかたは同じ平面に対し一通りでないので，(10)をこのようなパラメータ表示へ書き換える方法も一通りでない．

ここまで使わなかった内積を使うと，(10)は $\boldsymbol{n} = {}^t[\lambda, \mu, \nu]$，$\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, x_2, x_3]$，$\boldsymbol{p} = {}^t[p_1, p_2, p_3]$ として

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}) = \kappa \qquad (\kappa = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})) \tag{10'}$$

と書け，$\boldsymbol{n}$ と直交する平面を表す(図 3)．$\boldsymbol{n}$ をこの平面の**法線ベクトル**という(法 = normal．規準の意であろう)．$|\boldsymbol{n}| = 1$ なら，(10′)は $\boldsymbol{n}$ と直交する平面のうち $\boldsymbol{n}$ の方向に原点から距離 $\kappa = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})$ のものを表す．

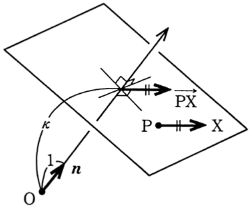



**図 3**　$\boldsymbol{n}$ と直交する平面（$|\boldsymbol{n}| = 1$ のとき）

**問** (i) 空間の3点 $\mathrm{P}\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$, $\mathrm{Q}\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{R}\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ を通る平面の方程式を求めよ．またこの平面と単位立方体 $U = \{(x, y, z) | 0 \leqq x, y, z \leqq 1\}$ の共通部分を図示せよ．

(ii) (i)の平面が，平面 $z = 0$ となす鋭角の余弦(cos)を求めよ．

## 7.3 平行6面体の体積

$A$ が実2次行列のとき，$A$ による1次変換 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$)で平面図形の面積は行列式 $|A|$ の絶対値倍になった(§2.5)．3次の実行列

$$A = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \in M_{3,3}(\boldsymbol{R})$$

について同じことを考えてみよう．$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を3辺とする単位立方体

$$U = \{x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \mid 0 \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq 1\} \qquad (\text{体積は } 1)$$

の $A$ による像を $A(U) = \{A\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \in U\}$ と書く．$A\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{b}$, $A\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{c}$ だから

$$A(U) = \{x_1\boldsymbol{a} + x_2\boldsymbol{b} + x_3\boldsymbol{c} \mid 0 \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq 1\} \tag{11}$$

である．これは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を3辺とする**平行6面体**である．

この体積 $V = V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ を「底面積×高さ」の方針で求める．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の第3成分がすべて0なら体積は0なので，$c_3 \neq 0$ としよう．平行四辺形のとき(§2.5)のような等積変形を考えると，たとえば $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} + l\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}$ に取りかえても体積 $V$ は不変である(図4)．

$$k = -\frac{a_3}{c_3}, \qquad l = -\frac{b_3}{c_3} \tag{12}$$

とすれば $\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} + l\boldsymbol{c}$ の第3成分が0となり，$c_3$ を高さと考えることができる．よって求める $V$ は

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) &= V(\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} + l\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}) \\ &= (\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} + l\boldsymbol{c} \text{ が作る平行四辺形の面積}) \times \text{高さ} \\ &= \mathrm{abs}\left( \begin{vmatrix} a_1 + kc_1 & b_1 + lc_1 \\ a_2 + kc_2 & b_2 + lc_2 \end{vmatrix} \cdot c_3 \right) \end{aligned} \tag{13}$$

ここで $k, l$ は(12)の通りで，違う意味の縦棒が続かぬよう abs で絶対値(absolute value)を表した．絶対値の内側を，2次の行列式の性質(練習問

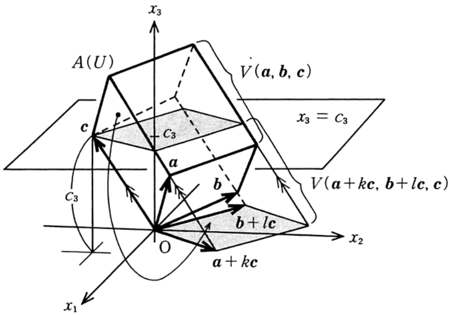



**図4**　平行6面体 $A(U)$ とその等積変形(13). 平面 $x_3 = c_3$ で切った上部を下につけ直す.

題 2-3)

$$\begin{cases} |k\boldsymbol{v}+k'\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}| = k|\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}|+k'|\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}| \\ |\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}| = -|\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}| \end{cases} \tag{14}$$

($\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}$ は2成分列ベクトル)を使って書き直す：すると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1+kc_1 & b_1+lc_1 \\ a_2+kc_2 & b_2+lc_2 \end{vmatrix} c_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_3 + \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} kc_3 + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} lc_3 \\ &\overset{(12)}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_3 - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} a_3 - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} b_3 \end{aligned} \tag{15}$$

となる($kl$ の係数は0になる). (15)を展開し, $abc$ 順に書けば(図5)

$$a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1 \tag{16}$$

この式の絶対値をとれば $V$ が得られる.

**定義6**　3次正方行列 $A = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ の成分が実数でないときも(16)を考え, $A$ の**行列式**とよぶ. 2次のときのように $|A|, |\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|, \det[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ などと書く. 実ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^3$ に対し, 実数 $|A| = |\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|$ を平行6面体 $A(U)$ の**符号つき体積**ともよぶ. □

3次の行列式は図5のように覚えるとよい. これより $|A| = |{}^tA|$ がわかる：3つの実線と3つの破線は, 行列を転置しても全体として変わらない. これは体積として素朴には意味がとれないが大事な性質である.

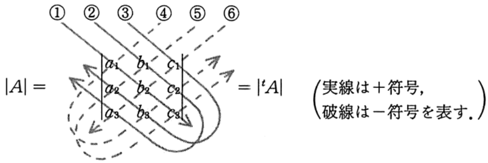



図5　3次の行列式(16)の覚え方「サラスの方法」

**例1**　$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1+1+0)-(0+0-1) = 3,$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{vmatrix} = \lambda\mu\nu, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-3abc. \qquad \square$$

(15)は平面の方程式(8)とも似ている．実際(16)を $c_i$ でまとめ直せば(または(15)と $|A| = |{}^tA|$ より)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_3 \tag{17}$$

$$\therefore \quad (8) \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x_1-p_1 \\ a_2 & b_2 & x_2-p_2 \\ a_3 & b_3 & x_3-p_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

(18)は「3つの列ベクトルを3辺とする平行6面体が体積0になり，平面になる」と読める．

さて2次の行列式の性質として，**乗法性**(§2.5)

$$|AB| = |A||B| \tag{19}$$

があった．これは8文字($=A$ と $B$ の成分)の恒等式であり，$A, B$ が実行列なら $AB$ が定める $\boldsymbol{R}^2$ の1次変換の倍率(面積比)が($A$ の倍率)×($B$ の倍率)という内容である．3次の行列式についても，実行列なら体積比に関する等式として(19)が成り立つはずで，実際18文字(!)の恒等式として(したがって成分が複素数でも)正しい(12章)．強引な計算でも示せるだろうがかなり悲惨である．ここでは認めて，先に進もう．

乗法性によると，$A$ に逆行列があるとして $A^{-1}A=E$ の行列式をとれば，$|A^{-1}||A|=1$．よって $|A^{-1}|=|A|^{-1}$ で，とくに $|A|\neq 0$ である．逆に $|A|\neq 0$ なら逆行列 $A^{-1}$ があることを後で示すが(§7.5，(34)式)，直観的には立方体を $A$ でうつしてつぶれなければ逆写像があって当然だろう．これらは $A$ が2次のとき(平面の1次変換のとき)と同様である[2]．

**問**　(i)　$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ を3辺とする平行6面体の体積を求めよ．

(ii)　3次の行列式について次を示せ．

$$|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}|=-|\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}|=-|\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}| \qquad \text{(交代性)}$$

$$|k\boldsymbol{a}+k'\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}|=k|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}|+k'|\boldsymbol{a}',\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}| \qquad \text{(列に関する線型性)}$$

## 7.4　向きと行列式

実3次行列 $A=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ による1次変換 $A:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ で，図形の体積は行列式 $|A|$ の絶対値倍になる．一方 $A$ が実2次行列なら，$|A|$ の符号は $A:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ が平面の表裏をひっくりかえすかどうかを表した．3次の行列式の符号にも同様の意味がある．

**例2**　回転を表す行列 $R$ について，体積を変えないから $|R|=\pm 1$ のはずだが，じつは $|R|=1$ である．実際，§6.7 の $Z_\phi$, $Y_\theta$ について $|Z_\phi|=1$, $|Y_\theta|=1$ なので，オイラー角表示 $R=Z_\phi Y_\theta Z_\psi$ と乗法性(19)により

$$|R|=|Z_\phi||Y_\theta||Z_\psi|=1.$$

**例3**　恒等写像を表す $E=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ について $|E|=1$．一方，$E'=[-\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ について $|E'|=-1$．

$E'$ 倍は $x_1$ 座標のみを $-1$ 倍にし，$x_2x_3$ 平面についての**鏡映**を表す．

一般に原点を通る平面 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})=0$ についての鏡映(図6)を考えると，ある回転 $R$ で $\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{e}_1$ にうつせば $A=R^{-1}E'R$ と書ける(平面のときの折り返し§3.2と同様，練習問題7-6も見よ)．∴　$|A|=|R|^{-1}|E'||R|=-1$．　□

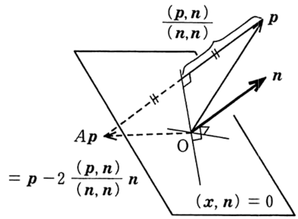



図6　平面 $(x, n)=0$ に関する点 $p$ の鏡映 $Ap$.

$e_1, e_2, e_3$ を図7のように右手系に配置したとすれば，$E' = [-e_1, e_2, e_3]$ は左手系を表している．右手系と左手系は経験上「向きが違う」が，この経験は頭の中で2組の座標軸を連続的に変形しても順番どおりには重ねあわせることができないことと考えられる．(図7で，(1)を(1)に，(2)を(2)に，(3)を(3)に重ねられるかという意味．この順番を無視すれば，右手系

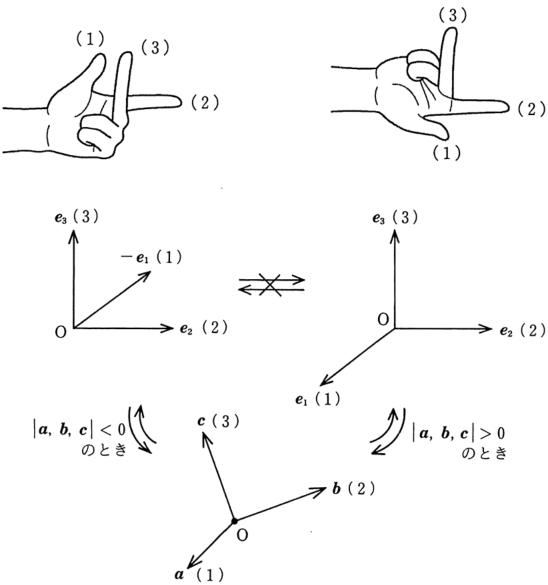



図7　右手系と左手系．矢印「⇄」は連続的変形でうつりあうことを示す．

は左手系と重ねあわせることができてしまう）．

**定理9** 実3次行列 $A=[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ が $\pm|A|>0$ のとき，平行体 $A(U)$ ((11)式)の3辺 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を，この順に立方体の3辺 $\pm\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ (複号は同順)まで，平行体が平面につぶれないようにしつつ連続的に変形できる．

とくに $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が右手系で $|A|$ が正なら，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ はやはり右手系をなす．つまり，$A$ は向きを変えない．

**証明** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が長さ1で互いに直交するとしよう．オイラー角の要領で考えると，適当な回転で $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}$ をそれぞれ $\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2$ に一致させれば，最後の一つは「これらと直交し長さ1」だから $\pm\boldsymbol{e}_1$ のどちらかになる．つまり $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}](=A)$ をこの回転で $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3](=E)$ または $[-\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3](=E')$ に連続的に変形できる．$|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|=|A|$ は $a_i, b_i, c_i$ の多項式(連続関数！)だから，この過程で $|A|=\pm1$ も連続的に変化すべきだが，整数なので変われない．よって $E$ に変形できるときは $|A|=|E|=1$，$E'$ になるときは $|A|=|E'|=-1$．

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が直交せず長さもまちまちでも，これらを3辺とする平行体を体積がつぶれぬようにしつつ連続的に変形し，まず直方体に，そして立方体にできる．(たとえば，$\boldsymbol{a}$ を固定して $\boldsymbol{b}$ をこれと直交する方向まで動かし，次いで $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が張る面に対し $\boldsymbol{c}$ を直交する方向に動かせばよい．) 体積がつぶれないよう変形するとは，変形の途中で行列式が0にならないということ．すると変形の前後で行列式の正負は同じである(中間値の定理)．

結局，平行体をなす $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ も立方体に連続変形すれば，その途中で行列式の符号は変化しない．よって $E$ と $E'$ のどちらの「向き」になるか，行列式 $|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|$ の符号できまることになる． □

**問** §7.3の問(i)のベクトルの組 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ は右手系か左手系か，判定せよ．ただし $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ は右手系であるとする．

## 7.5 ベクトル積

ふたたび平面 $\Pi$ の方程式(8)を考える．$\Pi$ が原点Oを通るときを考え

れば $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ はこの平面上にあるから，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し

$$\left[\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right]\boldsymbol{x} = 0 \tag{20}$$

である．これは直接計算しても確かめられる．$\boldsymbol{R}^3$ をユークリッド空間と考え，つまり $\boldsymbol{e}_i$ は互いに直交し長さ 1 とすれば[3]，(20)は

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3 \tag{21}$$

((9)を転置した列ベクトル)が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と直交するという内容である．

**定義 7**　ベクトル(21)を $\boldsymbol{a} = {}^t[a_1, a_2, a_3]$, $\boldsymbol{b} = {}^t[b_1, b_2, b_3] \in \boldsymbol{R}^3$ の**ベクトル積**または**外積**(exterior product)とよび，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と書く．　□

---

平面の方程式(8)は，$\boldsymbol{x} = \overrightarrow{\mathrm{OX}}$，$\boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ として

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) = 0 \tag{22}$$

と書ける．一方(21)と(17)を比べれば，ベクトル積は

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boldsymbol{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \boldsymbol{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{e}_2 \\ & & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} \tag{23}$$

と(形式的に)書ける．これと $\boldsymbol{c}$ との内積をとると，$\boldsymbol{e}_i$ が $\boldsymbol{c}$ の成分 $c_i$ で置きかわってもとの行列式になる．つまり

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| \tag{24}$$

これによって(22)と(18)とが結びつく．

---

(20)は $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 0$ と書ける．また(21)は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を取りかえると符号がかわるので，交代性

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} \qquad (\text{とくに}\quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}) \tag{25}$$

が成り立つ．これはベクトル積と内積の異なる点だが，類似の性質

$$\begin{cases} (k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}), \\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} \end{cases} \tag{26}$$

(線型性！)が(21)と(14)からわかる．内積を $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ (クロネッカーのデルタ，§6.4) により計算できたように，

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3, \qquad \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1, \qquad \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$$

および(25)，(26)により原理的に任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$ のベクトル積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ が計

算できる．もちろんその結果は定義に用いた(21)と同じになる．

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と直交する((20)式)から，あとは大きさと向きで $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ がきまる．式がカンタンになる $a_3 = b_3 = 0$ のときを考えると

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \overset{(21)}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 \tag{27}$$

この係数は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす平行四辺形の面積の ±1 倍で，± は $x_1x_2$ 平面内で $\boldsymbol{a}$ から見て $\boldsymbol{b}$ が左側にあれば正，右側なら負である(図 8)．どちらの場合も $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ をこの順に考えると $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ と同じ右手系になっている($(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ が右手系のとき．そうでなければ左手系になる)．一般にも：

**定理 10**　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$ のベクトル積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$(21)は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と直交し，その大きさは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積に等しい(図 8)．また $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ が右手系ならば $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ もそうである($\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ のとき)．

**証明**　補助的に第 3 のベクトル $\boldsymbol{c}$ を考えるとわかりやすい(図 9)．$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ のなす角を $\theta$ とすれば $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta$ だが，左辺は(24)により平行 6 面体の符号つき体積である．$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に直交するから，$|\boldsymbol{c}|\cos\theta$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平面に対する $\boldsymbol{c}$ の終点の高さである．よって

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \pm|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|/(|\boldsymbol{c}|\cos\theta)$$

は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積である．さらに

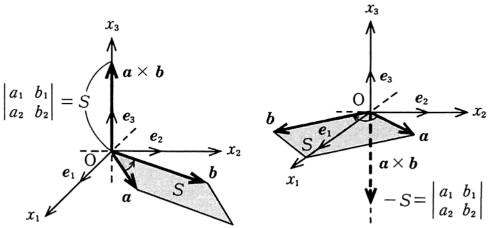



図 8　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の大きさと方向：$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を右手の親指，人差指，中指をこの順に開いてできる右手系に配置したとき．($a_3 = b_3 = 0$ のときの図)．$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が左手系なら紙面全体を鏡にうつした図になる．

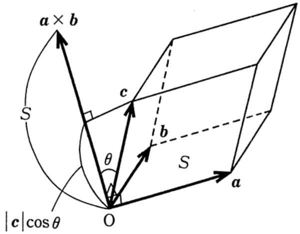



図 9　定理 10 の証明

$$|\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| \overset{(24)}{=} (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) > 0.$$

よって前節の行列式と向きの関係(定理 9)により，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ はこの順にそれぞれ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ まで連続的に変形できる(右手系)．　□

---

**別証**　定理は回転で不変な内容だから，一般のときも(27)で示されているはずである．それにはベクトル積そのものが回転 $R$ と相性がよいことを確かめればよい．次が成り立つ．

$$(R\boldsymbol{a})\times(R\boldsymbol{b}) = R(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{28}$$

つまり「回したものの積」は「積をとってから回した」ものに等しい．よって $a_3 = b_3 = 0$ のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を回転した場合として一般にも定理が成り立つことになる．

そこで(28)を(24)から示そう．すべての $\boldsymbol{v}$ に対し

$$((R\boldsymbol{a})\times(R\boldsymbol{b}),\ \boldsymbol{v}) = (R(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),\ \boldsymbol{v}) \tag{29}$$

ならよい．(24)と(19)より

$$\text{左辺} = |R\boldsymbol{a}, R\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}| = |R|\cdot|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, R^{-1}\boldsymbol{v}|.$$

回転 $R$ について $R^{-1} = {}^tR$ で(練習問題 6-4)，また $|R| = 1$(§7.4)だから，これは

$$1\times|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, {}^tR\boldsymbol{v}| = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\ {}^tR\boldsymbol{v}) = (R(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),\ \boldsymbol{v})$$

に等しい．なおこの計算から，一般の可逆な 3 次行列 $A$ に対しては

$$(A\boldsymbol{a})\times(A\boldsymbol{b}) = |A|\cdot{}^tA^{-1}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}). \tag{30}$$

---

ベクトル積について，結合法則 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ は成り立たない．実際，次が成り立つ．

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} \tag{31}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{32}$$

(31)の左辺は $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と直交するので $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の和で書け，かつ $\boldsymbol{c}$ と直交する

ので右辺の定数倍で，どれかの成分を計算すれば定数倍は1とわかる．(32)も同様にして示される．

**問**　(i)　$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}$とする．$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$を計算せよ．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$を2辺とする平行四辺形の面積はいくつか．

(ii)　(31), (32)を示せ．

---

**注意1**　$\boldsymbol{R}^n$でも(さらに任意の「ベクトル空間」でも)定義される外積という演算があり，素朴には2つ(以上)のベクトルの張る平行四辺形(，平行6面体，…)の向きつきの大きさを与える(§12.4)．ところが平行四辺形がどの平面にのっているかの情報を担うため$n(n-1)/2$個の成分が必要で，同じ空間のベクトルでは表せない：$n=3$ ($n(n-1)/2=3$)のときも，本来(9)は行(横)ベクトルだった．$n>3$では，2つのベクトルに直交する方向は2つ以上あるが，$n=3$では1つに決まる．これは$\boldsymbol{R}^3$の特殊性である．

**2**　行列式は11章でくわしく扱うが，もともと連立1次方程式を解くために考えられたという．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{w}\in\boldsymbol{R}^3$とし，$\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^3$を未知ベクトルとする方程式$A\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}$ $(A=[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}])$を考える．$\boldsymbol{v}={}^t[x, y, z]$とすれば$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{w}$．両辺の$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$との内積をとれば

$$x(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \tag{33}$$

よって$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|\neq 0$なら$x=\dfrac{|\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|}{|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|}$．同様に$y, z$も求め，まとめると次のようになる．

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|}\begin{bmatrix}|\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|\\|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{c}|\\|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{w}|\end{bmatrix}. \tag{34}$$

ただし，$|\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}|=-|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}|$という交代性(§7.3の問)を用いた．(33)を内積でなく行ベクトルと列ベクトルの積と考えれば，係数が実数でなくても(34)は解を与える(**クラメルの公式**)．これは逆行列ができたことを意味するから，$|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|=|A|\neq 0$ならば$A$は逆行列$A^{-1}$をもつ．

---

空間における平面の方程式を中心に，体積や向きについて考えた[4)]．平面は3変数の1次方程式(10)で表されたが，一般に連立方程式を考えること(代数)とそれが定める図形を考えること(幾何)とはきってもきれない関係にあり，一方の見方が他方を補う．逆行列を効率よく求めるためにも，次章では連立1次方程式の解き方について整理しよう．

## 道案内

1) 本章は「空間の幾何」と題したが，「空間とは何か」は難しい問であり，そもそも $\boldsymbol{R}^3$ を「空間」のモデルと思うこと自体，考え直す価値がある．原点Oと(斜交)座標系を決めれば，1点 $X$ は3つの実数で指定できる．これを列ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} (= \overrightarrow{OX})$ と見れば回転など線型写像を左からの行列倍で扱えるなど便利であるが，その前に「空間」において座標の和(ベクトルの和)に意味があると考えているわけである．これはその空間で平行四辺形が考えられるということであり，ユークリッドにおける平行線の公理「与えられた直線 $l$ と点Pに対し，Pを通り $l$ と平行な直線がただ1本存在する」にさかのぼることができるであろう．空間概念の数学的吟味については，たとえば

小林昭七『ユークリッド幾何から現代幾何へ』日本評論社(1990)

を参照．なお，第16章の内容も空間の捉え方と関係する．

2) §7.3 では，平行六面体の体積を等積変形と(底面積 × 高さ)により求めた．ここで一般に，等積変形を**有限回**くり返すだけで，三角錐を直方体にできるか？ という問がある．(2次元ならば，三角形は数回の等積変形で長方形にできる)．恐しいことに，これは一般に不可能であることが知られている(ヒルベルトの第3問題へのデーンの解答，1902)：

砂田利一『分割の幾何学』日本評論社(2000)

杉浦光夫(編)『ヒルベルト23の問題』日本評論社(1997)

3) 定義7(ベクトル積)の前に「$\boldsymbol{R}^3$ をユークリッド空間と考え」と書いた．そもそも(9)は単に(8)という平面の方程式の係数をならべたもので，(8)は単に行(横)ベクトルと列(縦)ベクトルの(行列としての演算による)積と考えれば内積と考える必然性はないわけである．

4) 空間の把握といえば，最近ではGPS(global positioning system)は欠かせない道具であろう．ここにも(もちろん)数学が用いられ，とくに日常の運用に支障のない誤差におさえるためには一般相対性理論まで用いられる．

田島稔・小牧和雄『最小二乗法と測量網平均の基礎』東洋書店(2001)

はGPSの解説が楽しいほか，多次元の正規分布についても述べられている．

## 練習問題

**7-1** （i）$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1/2\\0\\0\end{bmatrix}$ とする．$\boldsymbol{c}$ を位置ベクトルとする点を通り，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ で張られる平面 $\Pi_1$ の方程式を求めよ．

（ii） 平面 $x=z$ を $\Pi_2$ とする．$\Pi_2$ と(i)の $\Pi_1$ との交角を求めよ．

（iii） 単位立方体 $U=\{{}^t[x, y, z] | 0 \leqq x, y, z \leqq 1\}$ と $\Pi_1, \Pi_2, l$ の共通部分をそれぞれ描け．また線分 $l \cap U$ の長さを求めよ．

**7-2** ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の終点 A, B, C がなす三角形の面積は $\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|$ と書けることを示せ．

**7-3** 空間の 4 点 A(0, 1, 2)，B(1, 2, 2)，C(1, 0, 3)，D(−1, 2, 4) を頂点とする 4 面体の体積を求めよ．またベクトルの組 $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}})$ が右手系，左手系のどちらであるか判定せよ．ただしもとの $xyz$ 座標系は右手系であるとする．

**7-4** 空間の平面 $\Pi : y=1$ を，$x$ 軸を中心に正の向きに $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転して得られる平面 $\Pi'$ を，$\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$ の形で表せ．また，$\Pi'$ をさらに $y$ 軸を中心に正の向きに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転して得られる平面 $\Pi''$ を求めよ．

**7-5** 2 平面 $\Pi : ax+by+cz+d=0$, $\Pi' : a'x+b'y+c'z+d'=0$ が平行でないとき，その交線 $l$ を含む任意の平面 $\Pi''$ の方程式は

$$k(ax+by+cz+d)+k'(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

$(k, k'$ は適当な実数，$k^2+k'^2 \neq 0)$ と書けることを証明せよ．

**7-6** （i） 原点を通り，$\boldsymbol{n}={}^t[\alpha, \beta, \gamma] \neq \boldsymbol{0}$ を法線ベクトルとする平面 $\Pi(\boldsymbol{n})$ についての鏡映を $r_{\boldsymbol{n}}$ とする $\left(r_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-2\dfrac{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{x}\right.$，§7.4 図 6)．$r_{\boldsymbol{n}}$ を行列で表し，その行列式が $-1$ であることを確かめよ．

（ii） 2 つの鏡映 $r=r_{\boldsymbol{n}}$, $r'=r_{\boldsymbol{n}'}$ の合成 $r \circ r'$ は，原点を中心とするある回転であることを示せ．また，その回転軸と回転角を与えよ．ただし $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{n}'$ のなす角を $\theta$ とする．

# 8章：はき出し法，逆行列，階数

行列 $A=[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n]=[a_{ij}]$ を $(m,n)$ 型とし，$\boldsymbol{x}={}^t[x_1,\cdots,x_n]$，$\boldsymbol{y}={}^t[y_1,\cdots,y_m]$ が $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ をみたすとしよう．すなわち

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=y_1 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=y_m \end{cases} \tag{1}$$

であり，$x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{y}$ とも書ける．$y_i$ をきめ $x_i$ を未知数と思うと，これは連立1次方程式である．この方程式を解くことが本章の「お題」で，即物的なだけに応用上も[1)]，また行列を扱う技術としても基本的である．(1)は**消去法**(またの名を**はき出し法**)で解けるから，大きい正方行列の逆行列もこれを用いて求めることができる．

本章では，数の範囲は(実数でなくても)加減乗除で閉じていればよい．

**ことば**　それぞれ$(m,n)$型，$(m,n+1)$型の行列

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\qquad [A\,|\,\boldsymbol{y}]=\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & y_m \end{array}\right]$$

を，方程式(1)の**係数行列**，**拡大係数行列**($a_{ij}$ と $y_i$ を縦線でわけて並べた)という．また方程式(1)で「右辺が $\mathbf{0}$」の $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ を**斉次型**，そうでないとき**非斉次型**とよぶ．

## 8.1　行の基本変形，列の基本変形

次の正方行列 $C_{i,j}, D_i(\lambda), E_{i,j}(\lambda)$ を覚えておこう．なお，特に書いてない成分は0である．

**1.** 置換行列．$i\neq j$ とするとき

$$C_{i,j} := \begin{bmatrix} \ddots & & (i\,列) & & (j\,列) & & \\ & 1 & \vdots & & \vdots & & \\ (i\,行) & \cdots & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & & 1 & & & \\ (j\,行) & \cdots & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$(k, l)$成分のみ 1，ほかは 0 の行列単位 $E_{k,l}$ で書けば

$$C_{i,j} = C_{j,i} = E_{i,j} + E_{j,i} + \sum_{k \neq i,j} E_{k,k} \tag{2}$$

ただし行列のサイズを $n$ 次とするとき，$\sum\limits_{k\neq i,j}$ は 1 から $n$ のうち $i, j$ 以外の $k$ についての和を表す．単位行列 $1 = E = \sum\limits_{k=1}^{n} E_{k,k}$ の $(i, i)$, $(j, j)$成分を 0 にし，かわりに$(i, j)$, $(j, i)$成分を 1 にしたのが $C_{i,j}$ である．

**2.** 対角行列で，$i$ 番目の $\lambda$ 以外は 1 のもの．

$$D_i(\lambda) := \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, \overset{i}{\lambda}, 1, \cdots, 1) = \begin{bmatrix} \ddots & & (i\,列) & & \\ & 1 & \vdots & & \\ & & \lambda & \cdots & (i\,行) \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

**3.** 単位行列 $E = 1$ からある非対角成分だけ異なる行列．

$$E_{i,j}(\lambda) := 1 + \lambda E_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & & \overset{(j\,列)}{\vdots} & \\ & \ddots & \lambda & \cdots \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} (i\,行) \qquad (i \neq j)$$

それぞれ(ex)change の $C$，diagonal(対角)の $D$，$E_{i,j}$ の $E$ のつもりである．行列のサイズは，明示しなくても使う場面ごとに明らかだろう．

上の 3 種の行列は可逆(逆行列をもつ)で，実際

$$C_{i,j}^2 = 1, \qquad D_i(\lambda)\,D_i(\lambda^{-1}) = 1, \qquad E_{i,j}(\lambda)\,E_{i,j}(-\lambda) = 1.$$

ただし $i \neq j$ とし，第 2 式では $\lambda \neq 0$ とする．第 3 式は行列を 2 つ書いて確かめてもよいが，

$$(1+\lambda E_{i,j})(1-\lambda E_{i,j}) = 1-\lambda^2 E_{i,j}^2$$

および $E_{i,j}^2 = O$ ($i \neq j$ のとき)からもわかる．

これらを(1)の $A$ に**左から**掛けてみる．$m = n = 3$ (3 行 3 列)とし，$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ と書こう．

**L 1.** まず $C_{i,j}$ 倍について，たとえば

$$C_{1,2}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

同様に $C_{i,j}$ を左から掛けると，$A$ の第 $i$ 行と第 $j$ 行の入れ換えがおこる．

**L 2.** $D_i(\lambda)$ をかける．$i = 2$ で試すと，

$$D_2(\lambda)(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 & \lambda c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

第 2 行が $\lambda$ 倍された．$D_i(\lambda)$ は第 $i$ 行を $\lambda$ 倍にする．

**L 3.** 最後に $E_{i,j}(\lambda)$ 倍($i \neq j$)について，

$$E_{1,2}(\lambda)A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1+\lambda a_2 & b_1+\lambda b_2 & c_1+\lambda c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$E_{3,1}(\lambda)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\lambda a_1 & b_3+\lambda b_1 & c_3+\lambda c_1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

一般にも $E_{i,j}(\lambda)$ を左から掛けると，第 $i$ 行に第 $j$ 行の $\lambda$ 倍を加えることになる．　□

$A$ に $C_{i,j}, D_i(\lambda), E_{i,j}(\lambda)$ を左から掛けたときの変化は，$A$ が正方でな

くとも同じである．左から $B$ 倍することを $B\cdot$ と表せば（$A \mapsto B\cdot A$ のつもり），それぞれの効果は

**L 1**　$C_{i,j}\cdot$ は第 $i$ 行と第 $j$ 行の入れ換え，

**L 2**　$D_i(\lambda)\cdot$ は第 $i$ 行の $\lambda$ 倍，

**L 3**　$E_{i,j}(\lambda)\cdot$ は第 $i$ 行に第 $j$ 行の $\lambda$ 倍を加えること，

になる．**L 1～L 3** を**行の基本変形**，その繰り返しを**行変形**とよぶ．与えられた行列 $A$ に**左から** $C_{i,j}, D_i(\lambda), E_{i,j}(\lambda)$ たちを繰り返し掛けるのが行変形である．

$A$ に**右から** $C_{i,j}, D_i(\lambda), E_{i,j}(\lambda)$ を掛けるとき，これらの左に・をつけて表そう．すると同様に次の変形が引きおこされる（確かめよう）．

**R 1**　$\cdot C_{i,j}$ は $A$ の第 $i$ 列と第 $j$ 列の入れ換え，

**R 2**　$\cdot D_i(\lambda)$ は第 $i$ 列の $\lambda$ 倍，

**R 3**　$\cdot E_{i,j}(\lambda)$ は第 $j$ 列に第 $i$ 列の $\lambda$ 倍を加えること．

**R 1～R 3** を**列の基本変形**，その繰り返しを**列変形**とよぶ．

**問**　（i）　$\lambda, \mu \neq 0$，$i \neq j$ ならば $E_{ij}(\lambda)E_{ji}(\mu) \neq E_{ji}(\mu)E_{ij}(\lambda)$ であることを示せ．

（ii）　L1, L2, L3 の効果が(3)(4)(5)のようであることを確かめよ．また，R1, R2, R3 についても確かめよ．

## 8.2　行変形で逆行列を求める

じつは行変形（L1～L3）は，消去法の手続きそのものである．$A$ が2行2列のときに観察してみよう．

**例 1**　$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ のとき．

$$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x-2y = X & \cdots① \\ -x+2y = Y & \cdots② \end{cases}$$

であり，この方程式は次のように解くことができる：

$$\xrightarrow{\text{第 1 式の 1/2 倍を第 2 式に足す}} \begin{cases} 2x-2y=X & \cdots③=① \\ \phantom{2x-2}y=X/2+Y & \cdots④=②+\dfrac{1}{2}① \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 式を 1/2 倍に}} \begin{cases} x-\ y=X/2 & \cdots⑤=\dfrac{1}{2}③ \\ \phantom{x-\ }y=X/2+Y & \cdots⑥=④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 式を第 1 式に足す}} \begin{cases} x\phantom{-\ y}=X+Y & \cdots⑦=⑤+⑥ \\ \phantom{x-\ }y=X/2+Y & \cdots⑧=⑥ \end{cases} \tag{6}$$

このデータの変形は

$$[A\,|\,\boldsymbol{w}]=\left[\begin{array}{rr|l} 2 & -2 & X \\ -1 & 2 & Y \end{array}\right] \frac{1}{2}\left(\begin{array}{l}\text{第 1 行の 1/2 倍を}\\ \text{第 2 行に足す}\end{array}\right)$$

(＝拡大係数行列)

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rr|l} 2 & -2 & X \\ 0 & 1 & X/2+Y \end{array}\right]\cdot\frac{1}{2}\ (\text{第 1 行を 1/2 倍に})$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rr|l} 1 & -1 & X/2 \\ 0 & 1 & X/2+Y \end{array}\right] +1\left(\begin{array}{l}\text{第 2 行を}\\ \text{第 1 行に足す}\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 0 & X+Y \\ 0 & 1 & X/2+Y \end{array}\right]$$

と書きたくなる．**L 1**～**L 3** を思いだせば，各変形は

$$E_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D_1\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{1,2}(1)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

を左から掛けたとも言っても同じである．また

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X+Y \\ X/2+Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

と書け，この $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ は $A$ の逆行列．上では $A$ に左から $E_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $D_1\left(\frac{1}{2}\right)$, $E_{1,2}(1)$ を(この順に)掛けて

$$E_{1,2}(1)\,D_1\left(\frac{1}{2}\right)E_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right)A=E$$

$\left(\therefore\quad E_{1,2}(1)\,D_1\left(\frac{1}{2}\right)E_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right)=A^{-1}\right)$ となった結果，同じ変形をした $\boldsymbol{w}$ が解 $\boldsymbol{v}$ になったわけである：

$$E_{1,2}(1)D_1\left(\frac{1}{2}\right)E_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{w} = A^{-1}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}. \qquad \square$$

---

ここで，各ステップは逆の操作ができることに注意．たとえば(6)からは((6)の第2式)$-\frac{1}{2}$(第1式)で元の第2式になる(第1式は変っていなかった)．よってこれは同値な変形である(したがってほかに解はない)．各ステップで「元に戻れる」ことは，かけた3つの行列がすべて逆行列をもつことにほかならない．

---

上の計算を文字の行列で行えば，もちろん2次行列の逆行列の公式が得られる(§2.4参照)．

では次に，係数行列が3行3列のとき，上のような行変形で方程式(1)を解いてみよう．

一番大事なのは **L 3**「第 $i$ 式に第 $j$ 式の $\lambda$ 倍を加える」で，$a_{ii} \neq 0$ なら $\lambda = -a_{ij}/a_{ii}$ とすれば第 $i$ 式から $x_j$ を消去できる．係数行列で言えば，$E_{i,j}(-a_{ij}/a_{ii})$ 倍により $(i, j)$成分を0にできる．この操作を $a_{ii}$ を要(かなめ)とする**はき出し**(掃き出し)というが，「ホウキ」$a_{ii}$ で「ゴミ」$a_{ij}$ をきれいにするわけだ．

下の例は対角成分に0が現れる場合で，まず行交換 **L 1** で「ホウキ」を準備している．

**例 2**　$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ のとき，$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ を解く．

$A$ は$(1, 1)$成分が0だが，先々 $x = \cdots$ としたいので第1行と第2行をはじめに交換する(**L 1**)．$[A\,|\,\boldsymbol{w}]$ とならべて，

$$[A\,|\,\boldsymbol{w}] \xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第1行と第2行を}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & Y \\ 0 & 1 & 2 & X \\ 2 & 1 & 0 & Z \end{array}\right] \; -2\left(\begin{array}{l}\text{(第1行)×2を} \\ \text{第3行からひく}\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & Y \\ 0 & 1 & 2 & X \\ 0 & 1 & -2 & Z-2Y \end{array}\right] \; -1\left(\begin{array}{l}\text{第2行を} \\ \text{第3行から引く}\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & Y \\ 0 & 1 & 2 & X \\ 0 & 0 & -4 & Z-2Y-X \end{array}\right] \cdot \frac{-1}{4}\ \text{(第3行を }-1/4\text{ 倍する)}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & Y \\ 0 & 1 & 2 & X \\ 0 & 0 & 1 & (X+2Y-Z)/4 \end{array}\right] \quad \begin{pmatrix}\text{第1行に(第3行)×−1}\\ \text{第2行に(第3行)×−2}\\ \text{を加える}\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (-X+2Y+Z)/4 \\ 0 & 1 & 0 & (X-2Y+Z)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (X+2Y-Z)/4 \end{array}\right].$$

それぞれの段階では右に記した変形を行った．最後の縦線の右が解 $\boldsymbol{v}$ で，これで $A^{-1}$ も求まった：

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -X+2Y+Z \\ 2X-4Y+2Z \\ X+2Y-Z \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

---

**注意**　この例の変形は，順に

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を左から掛けたものと言える．このうち最後の行列は $E_{2,3}(-2)E_{1,3}(-1)$ または $E_{1,3}(-1)E_{2,3}(-2)$ と書け，もちろん両者は等しい．これは「第1行に第3行の $(-1)$ 倍を加え」次に「第2行に第3行の $(-2)$ 倍を加え」とするか，あるいはこの逆かの表示の違いである．

なお「第2行に第1行の $\lambda$ 倍を加える」$E_{2,1}(\lambda)$ と「第1行に第2行の $\mu$ 倍を加える」$E_{1,2}(\mu)$ とは $\lambda=\mu=0$ でない限り可換でない(問8.1(i))．これは先に足された行が変化しているからであるが，実際上も2つの行を同時に

$$\begin{cases} ① \\ ② \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} ①+② \\ ②+① \end{cases}$$

のようにすることは同値変形でなくなるので注意しよう．

---

任意の $\boldsymbol{w} = {}^t[X, Y, Z]$ に対する $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ を解いて，$A^{-1}$ を得た．$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ に対する $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_i$ の解を $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}'_i$ と書けば(すなわち $X=1$, $Y=Z=0$ のときの $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{a}'_1$)，$A^{-1} = [\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \boldsymbol{a}'_3]$ である．

一般にも $n$ 次正方行列 $A$ に逆行列があったとして $A^{-1} = [\boldsymbol{a}'_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_n]$ とおけば，$AA^{-1} = E$ より

$$A[\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n] \qquad (8)$$

つまり $\boldsymbol{a}'_i$ は $A\boldsymbol{a}'_i = \boldsymbol{e}_i$ の解である．

$n$ 個の未知ベクトル $\boldsymbol{a}'_i$ に対する方程式(8)を解いて逆行列を得るには，

拡大係数行列として $[A\,|\,\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n] = [A\,|\,E]$ を考え行変形すればよい．

$$[A\,|\,E] \xrightarrow{P\cdot} [PA\,|\,P] \xrightarrow{Q\cdot} \cdots \xrightarrow{S\cdot} [BA\,|\,B] \qquad (B = S\cdots QP)$$

左においた係数行列が行変形で $BA = E$ とできれば，右にある $B$ は方程式 $A[\boldsymbol{a}'_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_n] = E$ の解(つまり $AB = E$)であり，$B$ が $A^{-1}$ を与える．

---

つまり，正方行列 $A$ に対し行変形で $BA = E$ とできれば，$AB = E$ であることが示された．ダマサレタ気がする人への別証：$B$ は $P, \cdots, S$ の積で，これらは可逆行列 $C_{i,j}, D_i(\lambda), E_{i,j}(\mu)$ またはその積であり可逆．よって $B$ も $B^{-1} = P^{-1}Q^{-1}\cdots S^{-1}$ をもつ．すると $BA = E$ より $B^{-1}(BA)B = B^{-1}B$，$\therefore\ AB = E$．これは，行変形が方程式の同値変形で，その結果 $B$ がたしかに解を与えることの確認ともいえる．

---

**例 3**　$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ の逆行列．対角線の成分を要として，まず左下を 0 に，次に右上を 0 にはき出し，最後に対角線を 1 にしよう．

$$[A\,|\,E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2} \end{matrix}$$

（第 1 行の 1/2 倍を第 2, 3 行に加える）

$$\xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right] \; 2$$

（第 2 行の 2 倍を第 3 行に加える）

$$\xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\cdot} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3/2 & 2 & 1 \end{array}\right] \; -1$$

（第 2 行から第 3 行を引く）

$$\xrightarrow{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&-2&0&1&0&0\\0&1&0&-1&-1&-1\\0&0&-2&3/2&2&1\end{array}\right]\overset{\curvearrowleft}{\phantom{x}}2\left(\begin{array}{l}\text{第1行に第2行}\\\text{の2倍を加える}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&-1&-2&-2\\0&1&0&-1&-1&-1\\0&0&-2&3/2&2&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\cdot\frac{1}{2}\\ \\ \cdot\frac{-1}{2}\end{array}\left(\begin{array}{l}\text{第1行を}\frac{1}{2}\text{倍,}\\ \\ \text{第3行を}\frac{-1}{2}\text{倍}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{bmatrix}1/2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1/2\end{bmatrix}\cdot}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/2&-1&-1\\0&1&0&-1&-1&-1\\0&0&1&-3/4&-1&-1/2\end{array}\right]$$

したがって，$A^{-1}=\begin{bmatrix}-1/2&-1&-1\\-1&-1&-1\\-3/4&-1&-1/2\end{bmatrix}$.

この例では $C_{i,j}$ は使わずに済んだ．これは各ステップで対角線上に 0 が現れなかったためである．対角線に 0 が現れたら，例 2 のように行の交換でその対角成分を 0 でなくせばよい．そのように行の交換ができなければ元の行列は可逆でない(例 7)[2]． □

---

例 3 のように $C_{ij}$ を使わなかった場合の行変形の履歴は，次のように書ける．

$$[A|E]\xrightarrow{L}[LA|L]\xrightarrow{U}[ULA|UL]=[E|A^{-1}]$$

ただし $L$ は $A$ の対角線左下をはき出すのに用いた下三角行列の積で，下三角 (Lower triangular)．同様に $U$ は上三角になった $LA$ を単位行列にするため使った上三角行列の積で，上三角(Upper triangular)．$L$ も $U$ も基本変形の積で可逆だから，$ULA=E$ より $A=L^{-1}U^{-1}$ である．これを $A$ の **LU 分解**または**ガウス分解**とよぶ．上(下)三角行列の逆は上(下)三角なので(例 4 参照)，この分解 $A=L^{-1}U^{-1}$ は $A$ を下三角行列×上三角行列と書く分解である．

---

4 次以上で逆行列を求めるのも，もはや同様である．

**例 4**　$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ の逆行列．まず第 4 行で第 3 行をはき出す．

$$[A|E]\xrightarrow{E_{3,4}(-1)\cdot}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\curvearrowleft -1$$

$$\xrightarrow{E_{2,3}(-1)\cdot}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&-1&1\\0&0&1&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\curvearrowleft -1$$

$$\xrightarrow{E_{1,2}(-1)\cdot}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-1&1&-1\\0&1&0&0&0&1&-1&1\\0&0&1&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right]=[E|A^{-1}].$$

**問**　（i）　例 4 の変形の仕方を順に説明せよ．

（ii）　逆行列を求めよ：$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\1&0&1\end{bmatrix}$.

## 8.3　列変形の意味

列変形は右側から $C_{i,j}, D_i(\lambda), E_{i,j}(\lambda)$ を掛ける操作だった．これによって，方程式(1)の係数行列 $A$ を $A\xrightarrow{\cdot B}A'=AB$ にしたとする．$A'$ ではじめの方程式を書くと $A'(B^{-1}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ で，$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x}'=B^{-1}\boldsymbol{x}$ に変化する．つまり列変形は，連立方程式(1)の変数をとり換える操作である．基本変形は可逆なので，この変数変換で方程式は互いに同値なものに変換される．

**例 5**　未知数が 2 つの，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ のとき．

$$\boldsymbol{x}'=C_{1,2}^{-1}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\x_1\end{bmatrix}$$

は変数の順序のとり換えである．また

$$\boldsymbol{x}'=E_{1,2}(\lambda)^{-1}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1&-\lambda\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-\lambda x_2\\x_2\end{bmatrix}$$

は $x_1$ を $x_1' = x_1 - \lambda x_2$ にとり換える変数変換である．

---

**注意**　連立方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ を解くには行変形が必然だが，逆行列を求めるだけなら列変形でも可能である．$A$ と単位行列 $E$ をタテに並べ，これに右から基本の行列を掛けて $A$ が $E$ になるまで列変形すれば(できれば)

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot P} \begin{bmatrix} AP \\ P \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot Q} \cdots \xrightarrow{\cdot S} \begin{bmatrix} E \\ PQ\cdots S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}.$$

---

**例 6**　(1)の係数行列 $A = [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n]$ が横長 $(m < n)$ であり，列 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ のうち $j_1, \cdots, j_m$ 番目は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ であるとする．このとき $A$ は列を入れ換えて(列変形)，次のようにできる．

$$A \xrightarrow{\cdot B} [\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{a}_1', \cdots, \boldsymbol{a}_{n-m}'] = \begin{bmatrix} 1 & & O & & & \\ & \ddots & & \boldsymbol{a}_1' & \cdots & \boldsymbol{a}_{n-m}' \\ O & & 1 & & & \end{bmatrix}$$

($\boldsymbol{a}_1', \cdots, \boldsymbol{a}_{n-m}'$ は $A$ の $j_1, \cdots, j_m$ 列以外を順に並べたもの．)　これは

$$\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, \cdots, x_n] \longrightarrow \boldsymbol{x}' = {}^t[x_{j_1}, \cdots, x_{j_m}, x_1', \cdots, x_{n-m}']$$

$(x_1, \cdots, x_n$ から $j_1, \cdots, j_m$ 番目を前に取り出し，残りを順に $x_1', \cdots, x_{n-m}'$ とした．$\boldsymbol{x}' = B^{-1}\boldsymbol{x})$ と変数を並べかえることにほかならない．すなわち

$$\begin{aligned} &x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \ (= \boldsymbol{y}) \\ &\quad = x_{j_1}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_{j_m}\boldsymbol{e}_m + x_1'\boldsymbol{a}_1' + \cdots + x_{n-m}'\boldsymbol{a}_{n-m}' \end{aligned}$$

と和の順序を入れ換えたわけである．移項すれば(1)がただちに解けて

$$\begin{bmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} - x_1'\boldsymbol{a}_1' - \cdots - x_{n-m}'\boldsymbol{a}_{n-m}' \qquad (x_1', \cdots, x_{n-m}' \text{ は任意})$$

である．$n-m$ 個のパラメータ $x_1', \cdots, x_{n-m}'$ で $\boldsymbol{x}$ がきまる．　□

**問**　方程式 $\begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ の解を例 6 の形に表せ．

## 8.4　長方行列のとき．行列の階数

可逆な正方行列ばかり扱ったが，正方行列すべてが可逆でないのはもちろんである．それを念頭におきつつ，$m$ 行 $n$ 列の行列 $A$ を考えよう．

**定理 11** それぞれ行変形と列変形を表す $m$ 次，$n$ 次の可逆正方行列 $P$, $Q$ により，任意の $(m, n)$ 型行列 $A$ は次の形に変形できる．

$$PAQ = R = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & O & \\ & & 1 & & \\ O & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \qquad (9)$$

（対角線にそって 1 が $r$ 個並び，残りはすべて 0.）

**証明（変形の方針）** **1.** $A$ の $(1,1)$ 成分が 0 でなければ **2** へ進み，0 であれば $C_{1,j}$ を左または右から掛けて 0 でない成分が $(1,1)$ にくるようにする．もしこうできなければ，もともと $A = O$ である．

**2.** $(1,1)$ 成分を用い，下と右に「はき出す」．$A$ は次の形になる．

$$P_1AQ_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

さらに $D_1(a_{1,1}^{-1})$ を左あるいは右から掛ければ，$a_{1,1}$ の部分は 1 にできる．

**3.** $A'$ に上と同じ操作をすれば，下の形になる．

$$P_2P_1AQ_1Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & & \\ 0 & \vdots & & A'' \end{bmatrix}$$

**4.** これを繰り返して，右下の $A', A'', \cdots$ の部分にもはや 0 しかなくなれば，それが求める形である． □

**定義 8** $A$ を行と列の変形で(9)の右辺の形にするとき，変形の仕方 $P$ や $Q$ はいろいろでも，並ぶ 1 の個数 $r$ は一定である（証明は次章 § 9.4）．この $r$ を行列 $A$ の**階数**または**ランク**と呼び，$\mathrm{rank}\, A$ と書く．また(9)の右辺を $A$ の**階数標準形**または**ランク標準形**とよぶ． □

---

**注意** $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}({}^tA)$ である．実際 $A \to PAQ = R$ が(9)の変形のとき ${}^tA$

→ ${}^tQ{}^tA{}^tP = {}^tR$ だが，${}^tP, {}^tQ$ は基本変形の積で，また $R$ と ${}^tR$ の階数は同じ．

---

**例 7**　定義に述べたように，ランク標準形(9)を求めるには方針 1〜4 以外によってもよい．たとえば $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$ を行変形すると

$$A \xrightarrow{C_{1,2}\cdot} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{3,1}(-2)\cdot} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{1,2}(-5)\,E_{3,2}(1)\cdot} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{D_1\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

これで rank $A = 2$ がわかる．実際，さらに列変形すると

$$\xrightarrow{\cdot E_{1,3}(1)\,E_{1,4}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot E_{2,3}(-2)\,E_{2,4}(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

方針 **1〜4** によれば，$(2,1), (3,1)$ 成分を 0 にした後に列変形で $(1,2), (1,3), (1,4)$ 成分を 0 にすべきだが，それには分数 $\frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}$ が必要．そこで一見して 0 がふえる行変形を先にした．連立方程式を解くことを念頭に行変形でがんばったと考えてもよい．　□

一般にも(10)のように，$A$ を行変形のみで次の「階段形」まで変形できる($A$ の各列は $\mathbf{0}$ でないものとしよう)．

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & O & 0 & * \cdots * & 0 & & 0 & * \cdots * & \\ & \ddots & 0 & * \cdots * & \vdots & O & 0 & & \\ & & 1 & * \cdots * & 0 & & \vdots & \vdots & \\ & & & & 1 & & & & * \\ & & & & & \ddots & 0 & & \\ & O & & & & & 1 & * \cdots * & \\ & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{11}$$

左上から右下にかけて 1 が並ぶが，一般に対角線でなく階段状になり，右上は斜めに並ぶ 1 の真上以外(＊印)は 0 にできるとは限らない．0 でない

行は上から $r = \mathrm{rank}\, A$ 個だけある．

なお $A$ のどれかの列がはじめから $\mathbf{0}$ のときは，行変形でその列は $\mathbf{0}$ のままであるから，(11)の結果もところどころ $\mathbf{0}$ の列を含むものとなる．

---

変形の方針は(10)と同じで，行変形で左下に 0 を作るのが基本である．

いま第 $i$ 列までは対角線以外を 0 にできたが，次の第$(i+1, i+1)$成分が 0 ではき出しの要に使えないとする．この下に 0 でない成分があれば，その行との交換をすればよい．これができないとき(上の行との交換を考えると，せっかく 0 ばかりが並んでいる左下がそうでなくなってしまう．下の行との交換では，すでに左下が 0 ばかりでこの悩みは生じない)は，$i+1$ 列は $i$ 行目より下がすべて 0 ということ．そこで単に次の列に進むことにして，次の列でも下方に 0 しかなければ，また次の列に進む．これが「階段」になる理由である．

---

**問**　階数を求めよ．(i) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$　(ii) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

## 8.5　一般の連立1次方程式の解のパターン

さて，はじめの方程式(1)に戻ろう：

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \qquad (A \text{ は } m \text{ 行 } n \text{ 列とする})$$

拡大係数行列を $[A\,|\,\boldsymbol{y}] \xrightarrow{P} [PA\,|\,P\boldsymbol{y}]$ と行変形した結果，$PA$ が(11)の形になったとしよう．(11)の列のうち $r$ 個($j_1, \cdots, j_r$ としよう．$r \leqq m, n$ に注意)は基本ベクトルだから，例6のように並べかえて

$$\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, \cdots, x_n] \xrightarrow{Q} \boldsymbol{x}' = {}^t[x_{j_1}, \cdots, x_{j_r}, x_1', \cdots, x_{n-r}'] \tag{12}$$

($Q$ は並べかえを表す行列)とすれば

$$(1) \Longleftrightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & O & \boldsymbol{a}_1' & \cdots & \boldsymbol{a}_{n-r}' \\ & \ddots & & & & \\ O & & 1 & & & \\ \hline & O & & & O & \end{array}\right]}_{A'} \begin{bmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_r} \\ x_1' \\ \vdots \\ x_{n-r}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_r' \\ \hline y_{r+1}' \\ \vdots \\ y_m' \end{bmatrix} \tag{13}$$

(対角部分の 1 の個数は $r$)

($A' = PAQ^{-1}$，右辺 $\boldsymbol{y}' = P\boldsymbol{y}$)である．左辺の $r+1$ 行目以下は 0 だから $y_{r+1}' = \cdots = y_m' = 0$ が必要で，これは「拡大係数行列も $r$ 行より下が 0」

だから rank $[A\,|\,\boldsymbol{y}] = \operatorname{rank} A$ と表せる．そのとき方程式の上部(第 $r$ 行まで)は例 6 の形だから，一般的結論として

**定理 12**　方程式(1)は行変形と変数の入れ換えで(13)の形に変形でき，

(i)　(1)が解をもつ $\iff y'_{r+1} = \cdots = y'_m = 0$

$$\iff \operatorname{rank}[A\,|\,\boldsymbol{y}] = \operatorname{rank} A.$$

(ii)　(i)の条件の下に，解は次で与えられる．

$$\begin{bmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_r \end{bmatrix} - x'_1\boldsymbol{a}'_1 - \cdots - x'_{n-r}\boldsymbol{a}'_{n-r} \qquad (x'_1, \cdots, x'_{n-r} \text{ は任意})$$

□

つまり(1)の解は「あれば $n-r$ 変数分だけ」ある．$n$ は未知数の個数，$r$ は独立な条件の個数であり，これは「解は(未知数の数)−(条件式の数)だけ自由度(パラメータ)を持つ」という経験則を裏づけている．定理の(i)にある通り，すべての $\boldsymbol{y}$ に対し解があるわけでないことに注意しよう．

**例 8**　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ とする．方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ はどんな $X, Y, Z$ に対して解をもつか？　定理の変形を行うと：

$$[A\,|\,\boldsymbol{y}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & X \\ 4 & 5 & 6 & Y \\ 7 & 8 & 9 & Z \end{array}\right] \begin{matrix} -4 \\ -7 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{l}\text{第 2 行から第 1 行の 4 倍，}\\ \text{第 3 行から第 1 行の 7 倍}\\ \text{を引く}\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & X \\ 0 & -3 & -6 & -4X+Y \\ 0 & -6 & -12 & -7X+Z \end{array}\right] -2 \left(\begin{array}{l}\text{第 2 行の 2 倍を}\\ \text{第 3 行から引く}\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & X \\ 0 & -3 & -6 & -4X+Y \\ 0 & 0 & 0 & X-2Y+Z \end{array}\right] \frac{2}{3} \left(\begin{array}{l}\text{第 1 行に}\\ \text{第 2 行の 2/3 倍を加える}\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & (-5X+2Y)/3 \\ 0 & -3 & -6 & -4X+Y \\ 0 & 0 & 0 & X-2Y+Z \end{array}\right] \cdot\frac{-1}{3} \left(\text{第 2 行を } -\tfrac{1}{3} \text{ 倍する}\right)$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & (-5X+2Y)/3\\ 0 & 1 & 2 & (4X-Y)/3\\ 0 & 0 & 0 & X-2Y+Z\end{array}\right].$$

よって解は $X-2Y+Z=0$ のときのみ存在し(これが定理 12(i)の条件)，

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-5X+2Y\\4X-Y\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\qquad(z：任意).\qquad(14)$$

□

---

結局 $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-5X+2Y)/3\\(4X-Y)/3\\X-2Y+Z\end{bmatrix}$ とできた．左辺を $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-z\\y+2z\\z\end{bmatrix}$ とさらに書きかえることが，列変形でランク標準形にする操作である．一般にここまで徹底して変形すると，新しい変数では方程式が $x_1'=y_1', \cdots, x_r'=y_r'$ と単純になり，もはや方程式という感じがしないくらいである．

---

例 8 のように $A$ が正方行列($m$ 次としよう)でも $r=\text{rank}\,A<m$ なら，方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ はすべての $\boldsymbol{y}$ に対し解 $\boldsymbol{x}$ をもつと限らない．

たとえば $A$ が平面を直線につぶす平面の 1 次変換のときがそうである(§2.6)．これは $m=2$，$r=1$ の場合である．

$m=3$，$r=2$ である例 8 では，$A$ により空間が平面につぶれ，その平面を表す式が $X-2Y+Z=0$ である．また解(14)の全体は $z$ をパラメータとして直線をなす．9, 10 章ではこのような幾何的見方を考える．

なお $n$ 次正方行列 $A$ に対し，条件 $r=n$ は(11)で対角線にきれいに 1 が並ぶということ．よって(11)の上三角部分も 0 にでき，行変形で単位行列にできるから $A^{-1}$ がある．このとき $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ は任意の $\boldsymbol{y}$ に対してただ一つの解 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{y}$ をもつ[3)]．

**問**　次の方程式を解け：$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 2 & 1\\0 & 3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}$.

## 道案内

1）経済予測のため各国がIMF(国際通貨基金)に提出を義務づけられている，産業連関表と呼ばれる巨大な行列(を係数とする巨大な連立1次方程式)があるそうだ：

伊藤昇・岩井齊良・岩堀長慶・上林達治・関野薫・高橋秀一『経済系・工学系のための行列とその応用』紀伊國屋書店(1987)

これは行列の最も「即物的」な使用といえるだろう．

2）例2，例3で行入れ換え(L1)がいつ必要かわかるが，数値計算の観点からは0でなくても0に近ければ割り算は避けたほうがよく，そのためにも行を入れ換える．

3）前章の空間の話とは一転した雰囲気になったが，共通の部分もある．与えられた行列あるいは線型写像を簡単なものに分解するという考え方である．回転のオイラー角のときは座標軸 $\boldsymbol{e}_i$ を中心とする回転に，今回は基本変形に，考えている行列を分解した．今後も問題に応じて適切な分解の仕方があることを繰り返し目にするだろう．

## 練習問題

**8-1** 逆行列があれば求め，なければ階数を求めよ．

（i） $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ （ii） $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

（iii） $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ （iv） $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

（v） $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ （vi） $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**8-2** （i） $n$ 次上三角行列 $A = [a_{ij}]$ $(i>j$ に対し $a_{ij} = 0)$ が逆行列をもつためには $a_{11} \cdots a_{nn} \neq 0$ が必要十分であり，このとき $A^{-1}$ も上三角であることを示せ．

（ii） 対称行列 $(A = {}^tA)$ が逆行列をもてばまた対称行列であることを示せ．

**8-3** （i） 積 $E_{12}(1)E_{21}(-1)E_{12}(1)$ を計算せよ．（$E_{ij}(\lambda)$ は p 117 の行列．）

（ii） 行変形(§ 8.1，L1～L3)のうち，行の入れ換え(L1)は他の 2 つの操作の組合せで得られることを示せ．

**8-4** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$ のベクトル積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ できまる $\boldsymbol{b}$ の線型写像とみる($f_{\boldsymbol{a}} : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$, $f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$)．$f_{\boldsymbol{a}}$ を行列で表し，その階数を求めよ．

**8-5** 次の方程式が解けるための条件と，そのときの解 $\boldsymbol{x}$ を求めよ．

（i） $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ （ii） $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

（iii） $A = \begin{bmatrix} t & & O \\ & \ddots & \\ O & & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ ($n$ 次) のとき，$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

# 9章：像と核，次元定理

2個の変数で平面，3変数なら空間をイメージするのは自然で，連立1次方程式に限らず見通しをよくしてくれる．変数の数がより多くて絵が描けないときのため，**像**，**核**，**次元**などの言葉が用意されている．イメージがわきやすいよう，本章ではすべて実数の範囲で考えよう．

## 9.1　像と核，部分ベクトル空間

行列 $A \in M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ を $(m, n)$型とする．連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ は $\operatorname{rank}[A, \boldsymbol{y}] = \operatorname{rank} A$ のときに限り解をもち，解は $\boldsymbol{x}$ のサイズ $n$ から $\operatorname{rank} A$ を引いた個数だけ任意パラメータ(自由度)をもつのだった．

たとえば，次の方程式を考えよう．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{1}$$

これは $3X-3Y+Z=0$ のときのみ解をもち，解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2X-Y \\ -X+Y \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (s \text{ は任意})$$

で与えられる(§8.5の問，確かめよ)．この例では変数の数は $n=3$，独立な条件の数は $\operatorname{rank} A = 2$ で，解に $3-2=1$ 個のパラメータが許される．それが $s$ である．

**観察**　$A = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ と書くと $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ なので，$\boldsymbol{x} = {}^t[x, y, z]$ に対し

$$A\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c} = (x+y)\boldsymbol{a}+(z+y)\boldsymbol{c}$$

つまり $\boldsymbol{x}$ が任意に動いても $A\boldsymbol{x}$ 全体は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}$ が張る平面にしかならない．それゆえ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ の解も，この平面の上の $\boldsymbol{y}$ に対してしか存在しない．これが条件 $3X-3Y+Z=0$ の意味である(図1右)．

**定義9**　一般に $A \in M_{m,n}(\boldsymbol{R})$ とするとき，$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ を勝手に動かしてできる $A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^m$ の全体を $A$ の**像**(像空間，Image)とよび，$A(\boldsymbol{R}^n)$ あるいは

Im $A$ で表す．

$$\mathrm{Im}\,A := \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n\} \subset \boldsymbol{R}^m$$

（複素行列の虚部も Im で表すことがあるが，誤解はないだろう．）　□

上の観察とまったく同様に，像 Im $A$ の元 $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^m$ に対してのみ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ は解 $\boldsymbol{x}$ を持ち，Im $A = \boldsymbol{R}^m$ なら，任意の $\boldsymbol{y}$ に対し解をもつ．

(1)に戻ると，$\boldsymbol{x}_0 = {}^t[1, -1, 1]$ に対し $A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$（図 1 左）．これが解のパラメータ（自由度，不定性）の由来である．

**定義 10**　$A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ の（$A$ で「消える」ような）ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ 全体を $A$ の**核**（Kernel）とよび，Ker $A$ と書く．

$$\mathrm{Ker}\,A := \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} \subset \boldsymbol{R}^n \qquad (2)$$

□

図 1 の直線 $l$ のように，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ に解が（あれば）どれだけあるかを表すのが核である．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ がこの方程式を満たすとき

$$A(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\,A.$$

よって Ker $A = \{\boldsymbol{0}\}$ のときは，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$．つまり解は 1 つしかありえない．

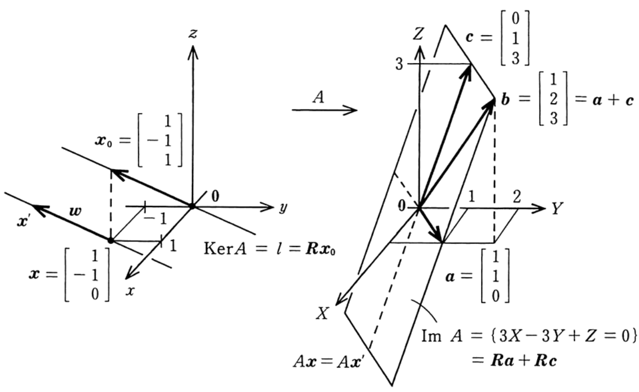



**図 1**　方程式(1)における $A : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ の像と核

一般には $\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}=\boldsymbol{w}$ と書けば，$\boldsymbol{w}\in \mathrm{Ker}\,A$ である．すなわち

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{w}\in \mathrm{Ker}\,A$$

であり，1つの解 $\boldsymbol{x}$(**特解**) がわかれば，他の任意の解 $\boldsymbol{x}'$ は $\boldsymbol{x}$ を $\mathrm{Ker}\,A$ の元だけずらして得られる．よって解全体(の集合，**解空間**)は

$$\{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{w}\mid \boldsymbol{w}\in \mathrm{Ker}\,A\} \tag{3}$$

と書ける．これを簡単に $\boldsymbol{x}+\mathrm{Ker}\,A$ とも書く．

図1のように，像や核は「平ら」である．これはベクトルの演算 = 和とスカラー倍があり，演算で閉じている(2つの元から平行四辺形を作ったとき，結果が外に出ない)からと考えられる．そこで

**定義11** $\boldsymbol{R}^n$ の空でない部分集合 $W$ について，$W$ の元の和とスカラー倍がまた $W$ に含まれるとき，$W$ を $\boldsymbol{R}^n$ の**部分ベクトル空間**とよぶ．すなわち

$$\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}'\in W,\ \ a\in \boldsymbol{R} \Longrightarrow \boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}'\in W,\ \ a\boldsymbol{w}\in W$$

をみたすときである．略して**部分空間**ともいう．（線型部分空間） □

定義より，部分ベクトル空間はその中の元の0倍として $\boldsymbol{0}$ を含まなくてはならないことに注意しよう．

**例1 ア)** 空間 $\boldsymbol{R}^3$ の原点を通る直線，あるいは原点を通る平面は，$\boldsymbol{R}^3$ の部分ベクトル空間である．実際，たとえば原点を通る平面上のベクトルを何倍かしても，また2つを加えても，もとの平面に含まれる．

**イ)**
$$W=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, z=2y=3x\right\}\subset \boldsymbol{R}^3 \tag{4}$$

は原点を通る直線であり，部分ベクトル空間である．

**ウ)** $\boldsymbol{R}^n$ 自身(**全空間**)，また $\boldsymbol{0}$ だけからなる集合 $\{\boldsymbol{0}\}$(**ゼロ空間**)も $\boldsymbol{R}^n$ の部分ベクトル空間である． □

---

**注** 原点を含まない直線や平面は，これと平行で原点を含む直線あるいは平面 $W$ を，あるベクトル $\boldsymbol{v}$ だけ平行移動した集合 $\boldsymbol{v}+W=\{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\mid \boldsymbol{w}\in W\}$ とみなせ

る．このように部分ベクトル空間 $W$ を平行移動した集合 $\boldsymbol{v}+W$ は**アフィン部分空間**とよぶ．affine ＝ 否定の a＋fine で，「もどき」という感じらしい．解空間(3)はその典型例で「核 Ker $A$ を特解 $\boldsymbol{x}$ だけ平行移動した $\boldsymbol{R}^n$ のアフィン部分空間」である．

---

**問**　(i)　$\boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{R}^3$ の次の部分集合はそれぞれ部分ベクトル空間か．

ア)　$W_ア = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \, x^2 = y^2 \right\}$　　イ)　$W_イ = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \, x+y+z=0 \right\}$

(ii)　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ とする．写像 $A : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ $(\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x})$ の像 Im $A$ および核 Ker $A$ を，それぞれ図示せよ．

## 9.2　次元の定義

さて $n > 3$ とすれば，$V = \boldsymbol{R}^n$ は我々が視覚で直観できる「空間」とは「自由度」あるいは「大きさ」が異なり，1点 $\boldsymbol{x} \in V$ を指定するのに $n$ 個のパラメータ(座標) $x_1, \cdots, x_n \in \boldsymbol{R}$ を必要とする．

そこで $V$ を $n$ 次元とよぶのは，日常のことば遣いに属するだろう．たとえば平面は2次元，空間は3次元だが，この2や3はそれぞれで1点を指定する際必要なパラメータの数で，独立な方向の数とも言える．

一般に部分空間についても，次のように次元を定義しよう．

**定義12**　$W \subset \boldsymbol{R}^n$ を部分空間とする．$W$ において，$d$ 個のベクトルの組 $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_d\}$ $(\boldsymbol{w}_j \in W)$ がとれて

(I)　任意の $\boldsymbol{w} \in W$ がこれらの1次結合で書ける：

$$\boldsymbol{w} = c_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_d \boldsymbol{w}_d. \tag{5}$$

(II)　(I)の表示は，ただ一通りである

とする．このとき $W$ の**次元**(dimension)は $d$ である($W$ は $d$ **次元**である)といい，$\dim W = d$ と表す．また，ベクトルの組 $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_d\}$ を $W$ の**基底**(basis)という．□

条件(II)で，表示(5)が一通りというのは

$$c_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_d \boldsymbol{w}_d = c_1' \boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_d' \boldsymbol{w}_d$$

$$\text{ならば，じつは}\quad c_1 = c_1',\ \cdots,\ c_d = c_d' \tag{6}$$

の意味で，$\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_d$ が $W$ の座標系を定めるのに必要な条件である(図 2．また，平面の場合の定義 2(§3.1)も見よ)．両辺の差を考えれば，これは

$$c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_d\boldsymbol{w}_d = \boldsymbol{0}\quad\text{ならば，}\quad c_1 = \cdots = c_d = 0 \tag{7}$$

と同値である．

なお，ゼロ空間 $\{\boldsymbol{0}\}$ の次元は(1 点 $\boldsymbol{0}$ を指定するのにパラメータは要らないから)0 と定めるのが自然で，のちのち(定理 13 などで)都合もよい．

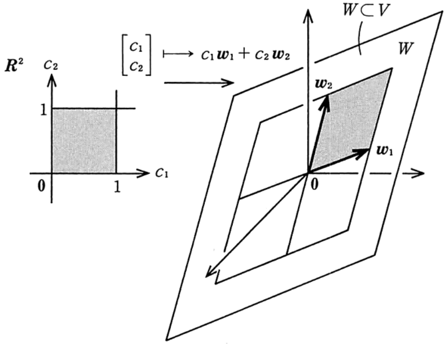



図 2　$W$ の基底 $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_d$ は $W$ に座標系を定める

**例 2**　ア)　実数直線 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^1$，平面 $\boldsymbol{R}^2$，空間 $\boldsymbol{R}^3$ にはひとつの基底として，それぞれ $\{\boldsymbol{e}_1\}, \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}, \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ がとれる．よって，上の定義の意味においてそれぞれは 1 次元，2 次元，3 次元である．

イ)　$\boldsymbol{R}^3$ に通常の $xyz$ 座標を考え，$z = 0$ で定まる平面 $W_1$ を考える．

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| z = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \boldsymbol{R}^3$$

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を使うと ${}^t[x, y, 0] = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ と 1 通りに書けるから，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ は $W_1$ の 1 つの基底である．したがって $\dim W_1 = 2$．同様に

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \middle| x + y + z = 0 \right\}$$

も $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間で，$\dim W_2 = 2$．

また，(4)の $W \subset \boldsymbol{R}^3$ は ${}^t[2, 3, 6]$ を基底にもち，$\dim W = 1$.

**ウ**）　(1)の $A = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ に対し，その像 $\mathrm{Im}\, A$ (= 図1右の平面)の基底として $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}$ がとれる．よって $\mathrm{Im}\, A$ は2次元である．□

条件(II)の意味を補足しておこう．平面 $\boldsymbol{R}^2$ のベクトルは $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の和で書けるが，これ以外に $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ を考えて

$$x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{w} \,(= (x+z)\boldsymbol{e}_1 + (y+z)\boldsymbol{e}_2) \qquad (8)$$

と(わざわざ)平面ベクトルを表しても，平面の点を表すのに3つのパラメータが要る(3つの独立な方向がある)とは誰も考えないだろう．実際，右辺に示したように $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ で左辺が表せてしまい，$\boldsymbol{w}$ は「不要な方向」である．1つのベクトルを((8)の両辺のように)二通りに表せることは，(6)～(7)のように差をとって考えれば

$$\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$$

という関係式があることにほかならない．(これはまた，$\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 0\boldsymbol{w}$ と異なる $\boldsymbol{0}$ の表示がある，とも表現できる．)

**定義 13**　$W \subset \boldsymbol{R}^n$ を部分ベクトル空間とする．

(I)′　$W$ のベクトルの組 $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_k\} \subset W$ が条件(I)をみたせば，$\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_k\}$ は $W$ を**張る**，あるいは**生成する**という．

(II)′　(II)(⇔(7))をみたす $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_k$ は，互いに**1次独立**であるという．1次独立でないとき**1次従属**という．□

---

「1次」をつけるのは(7)が1次式の条件だから．誤解がない範囲で，単に「独立」「従属」とよんでよいだろう．

---

たとえば上の $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{w}_3$ は(これらの和ですべての $\boldsymbol{R}^2$ のベクトルが書けるので) $\boldsymbol{R}^2$ を生成するが，((6)または(7)をみたさず) 1次独立ではない．

$\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_k\}$ が $W$ の基底であるとは，

(I)　これらが $W$ を張り，

(II)　互いに1次独立であること，

と言える．

**記号**　$\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_k\}$ が部分空間 $W$ を生成するとき，$W = \{x_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + x_k\boldsymbol{w}_k \mid x_i \in \boldsymbol{R}\}$ である．これを§7.1，§7.2と同様に略記し

$$W = \boldsymbol{R}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{R}\boldsymbol{w}_k \tag{9}$$

と書く．さらに $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_k\}$ が1次独立で，したがって基底なら，"$\oplus$" (直和記号という)で強調して

$$W = \boldsymbol{R}\boldsymbol{w}_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{R}\boldsymbol{w}_k$$

と表す：$\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1 \oplus \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{R}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \oplus \boldsymbol{R}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_n$ など．

一般に $A = [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n]$ のとき，

$$\operatorname{Im} A = \{x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \mid x_i \in \boldsymbol{R}\} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}_n$$

である．(1)の $A = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ に対しては，図1より

$$\operatorname{Im} A = \boldsymbol{R}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{R}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{R}\boldsymbol{c}$$

である($\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ も $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}$ も，$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ が張る平面 $\operatorname{Im} A$ の基底)．

**問**　(i)　§9.1問の $\operatorname{Im} A$，$\operatorname{Ker} A$，および $W_イ$ の基底を各1組求めよ．

(ii)　$A \in M_{n,n}(\boldsymbol{R})$ が可逆で $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \in \boldsymbol{R}^n$ が1次独立のとき，$A\boldsymbol{v}_1, \cdots, A\boldsymbol{v}_k$ も1次独立であることを示せ．

## 9.3　次元の定義がうまくいっていること

じつは定義12はまだ不完全で，次のようなイチャモンがありうる：「独立な方向のとりかたは，3次元だって回転したりすればいろいろあるし，一通りでない．$W$ の他の基底 $\boldsymbol{w}_1', \cdots, \boldsymbol{w}_{d'}'$ についても $d' = d$ か？」

他のベクトルの組 $\{\boldsymbol{w}_1', \cdots, \boldsymbol{w}_{d'}'\} \subset W$ があって，やはり任意の元を

$$\boldsymbol{w} = k_1'\boldsymbol{w}_1' + \cdots + k_{d'}'\boldsymbol{w}_{d'}'$$

と一通りに表せて，しかも $d \neq d'$ なんてことはおきないのか，というわけだ．こんなことがあれば，次元がただ1つにきまらず大変である．

**補題**　部分空間 $W$ の基底をなすベクトルの個数は一定である．よって次元は $W$ だけできまり，$W$ の次元とよべる．(これを「次元の定義に矛盾がない」「次元は well-defined である」などという．)

**証明**　任意の元が $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_d\}$ でも $\{\boldsymbol{w}_1', \cdots, \boldsymbol{w}_{d'}'\}$ でも書けるから，$\boldsymbol{w}_i$ を

$$\boldsymbol{w}_i = a_{i1}\boldsymbol{w}'_1 + \cdots + a_{id'}\boldsymbol{w}'_{d'} = \sum_{j=1}^{d'} a_{ij}\boldsymbol{w}'_j$$

と $\{\boldsymbol{w}'_j\}$ で書け，また $\boldsymbol{w}'_j$ を $\{\boldsymbol{w}_i\}$ で

$$\boldsymbol{w}'_j = b_{j1}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + b_{jd}\boldsymbol{w}_d = \sum_{k=1}^{d} b_{jk}\boldsymbol{w}_k$$

と書けるはずである．これを組み合わせれば

$$\boldsymbol{w}_i = \sum_{j=1}^{d'} a_{ij}\ \boldsymbol{w}'_j = \sum_{j=1}^{d'}\sum_{k=1}^{d} a_{ij}b_{jk}\boldsymbol{w}_k. \tag{10}$$

一方，次の表し方がもちろんある．

$$\boldsymbol{w}_i = 0\boldsymbol{w}_1 + \cdots + 1\boldsymbol{w}_i + \cdots + 0\boldsymbol{w}_d \tag{11}$$

仮定より $\boldsymbol{w}_i$ を $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_d\}$ で書く方法は一通りだから，(10), (11)における $\boldsymbol{w}_k$ の係数は同じで

$$\sum_{j=1}^{d'} a_{ij}b_{jk} = \delta_{i,k} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \tag{12}$$

でなくてはならない．同様に

$$\boldsymbol{w}'_j = \sum_{k=1}^{d} b_{jk}\boldsymbol{w}_k = \sum_{k=1}^{d}\sum_{l=1}^{d'} b_{jk}a_{kl}\boldsymbol{w}'_l \qquad \therefore \quad \sum_{k=1}^{d} b_{jk}a_{kl} = \delta_{j,l}. \tag{13}$$

(12), (13)は，行列を使うと見やすい．

$$AB = E_d, \qquad BA = E_{d'} \tag{14}$$

$$\left(A := [a_{i,j}]_{\substack{i=1,\cdots,d \\ j=1,\cdots,d'}}, \qquad B := [b_{j,i}]_{\substack{j=1,\cdots,d' \\ i=1,\cdots,d}}\right)$$

と書ける．$A$ は $d$ 行 $d'$ 列，$B$ は $d'$ 行 $d$ 列であり，$E_d, E_{d'}$ はそれぞれ $d$ 次，$d'$ 次の単位行列である．

さて $d > d'$ とすれば $B$ は横長で，はき出し法により次の形にできる：

$$B \longrightarrow PBQ = R = \underbrace{\begin{bmatrix} \overbrace{1 \quad \ddots \quad 1}^{r} & O & \\ O & 0 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}}_{d} \Big\} d' \tag{15}$$

$d > d'$ としたから，最後の列は必ず 0 ばかり．よって $\boldsymbol{e}_d = {}^t[0, \cdots, 0, 1]$ に対し $PBQ\boldsymbol{e}_d = \boldsymbol{0}$ となる．$P$ は行変形を表し可逆だから

$$BQ\boldsymbol{e}_d = \boldsymbol{0} \qquad \therefore \quad AB(Q\boldsymbol{e}_d) = \boldsymbol{0}.$$

$AB = E$ だから $Q\boldsymbol{e}_d = \boldsymbol{0}$ となるが，$Q$ も $P$ と同様可逆だから $\boldsymbol{e}_d = \boldsymbol{0}$.

これは矛盾である．$d < d'$ としても $A, B$ の役割を入れ換えて同様に矛盾が出るから，結局 $d = d'$. □

かくして，次元が**定義できる**ことがわかった！

空間の平面は回転しても平面だが，これにあたる次元の性質を調べておく．$A$ を $n$ 次可逆行列とし，$\boldsymbol{R}^n$ の部分空間 $W$ を $A$ で変換した集合

$$A(W) := \{A\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w} \in W\} \subset \boldsymbol{R}^n$$

を考える．$A(W)$ の元 $A\boldsymbol{w}, A\boldsymbol{w}'$ の和(一次結合)をとると

$$c(A\boldsymbol{w}) + c'(A\boldsymbol{w}') = A(c\boldsymbol{w} + c'\boldsymbol{w}') \in A(W).$$

つまり $A(W)$ も $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間である．この次元はモトの次元と等しい：

**定理 13** $W$ が $\boldsymbol{R}^n$ の部分ベクトル空間で，$A$ が $n$ 次可逆行列ならば

$$\dim W = \dim A(W).$$

**証明** 仮定より，$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ はすべての $\boldsymbol{w}$ に対してただ1つの解 $\boldsymbol{v}$ を持つ．よって：

1. 任意の $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ は $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{w}$ と書ける．
2. $\boldsymbol{w} = c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{w}_k \Longleftrightarrow A\boldsymbol{w} = c_1A\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_kA\boldsymbol{w}_k$

よって，一方の書き方が一通りなら他方でもそうである．

ゆえに $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_k$ が $W$ の基底なら，$A\boldsymbol{w}_1, \cdots, A\boldsymbol{w}_k$ は $A(W)$ の基底となる．とくに $W$ と $A(W)$ で基底の個数(＝次元)は $k$ で等しい． □

**例 3** 左から可逆行列を掛けることは行変形の操作であった．行変形で斉次方程式が解ける(＝係数行列の核がわかる)が，与えられたベクトルの組の1次独立性を調べるにも便利である：$B = [\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m]$ を $\boldsymbol{R}^n$ の $m$ 個のベクトルを並べた行列としよう．簡単のため，$B$ が

$$B \to AB = \left[\begin{array}{cc} E_r & * \\ \hline \multicolumn{2}{c}{O} \end{array}\right] \qquad (E_r \text{ は } r \text{ 次単位行列})$$

と行変形できたとすれば，$B$ のはじめの $r$ 列 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ は1次独立であり，

$\mathrm{Im}\, B$ の基底を与える．実際，$AB = [A\boldsymbol{v}_1, \cdots, A\boldsymbol{v}_n]$ における $A\boldsymbol{v}_{r+1}, \cdots, A\boldsymbol{v}_n$ は仮定より $A\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1, \cdots, A\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{e}_r$ で書け，この $r$ 個は1次独立．$A^{-1}$ で戻せば $\boldsymbol{v}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が独立な $r$ 個 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ で書けることになる．

これは $A$ で $\mathrm{Im}\, B$ が $\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_r$ に変換されたのである． □

**問** （i） 次のベクトルから1次独立なものを選び，$B = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]$ の像の基底にせよ．また $B$ の核の基底を一組求めよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

（ii） $W, V \subset \boldsymbol{R}^N$ はともに部分空間で $W \subset V$ とする．$\dim W \leqq \dim V$ を示せ．ここで等号が成り立てば $W = V$ であることを示せ．

## 9.4 次元定理

**定理 14** $A$ を $m$ 行 $n$ 列の行列とするとき

$$\mathrm{rank}\, A = \dim(\mathrm{Im}\, A), \tag{16}$$

$$\dim \mathrm{Ker}\, A = n - \mathrm{rank}\, A. \tag{17}$$

これを次元定理といい，下のように図解する．縦方向が次元を，横の矢印が行列 $A$ 倍を表している．これは $m, n$ が大きく図1のように書けない場合の代用品である．

**証明** ともに $A$ がランク標準形(15)なら，証明するまでもない($\boldsymbol{e}_1, \cdots,$

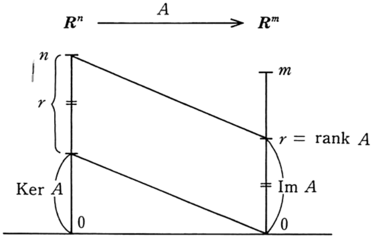



図3 次元定理の絵解き

$\boldsymbol{e}_r \in \boldsymbol{R}^m$ が像の基底，$\boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{n-r} \in \boldsymbol{R}^n$ が核の基底)．一般にも $A$ をランク標準形に直して考えればよい．基本変形は可逆行列で表せ，可逆行列による変換で次元は不変(定理 13)だからである．

実際，$A \to PAQ = R$ を(15)の形としよう．$r = \mathrm{rank}\, A$ である．

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \overset{\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{x}',\, \boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{y}'}{\Longleftrightarrow} R\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{y}' \tag{18}$$

であるから，像について

$$\mathrm{Im}\, A = \{A\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n\} = \{P^{-1}\boldsymbol{y}' \,|\, \boldsymbol{y}' = R\boldsymbol{x}'\} = P^{-1}(\mathrm{Im}\, R).$$

$\mathrm{Im}\, R$ は $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ を基底とし，その次元は $r = \mathrm{rank}\, A$．$P^{-1}$ は可逆ゆえ $\mathrm{Im}\, A$ も $r$ 次元となる．核については

$$\mathrm{Ker}\, A = \{\boldsymbol{x} \,|\, A\boldsymbol{x} = 0\} = \{Q\boldsymbol{x}' \,|\, R\boldsymbol{x}' = 0\} = Q(\mathrm{Ker}\, R)$$

$Q$ は可逆ゆえ $\dim \mathrm{Ker}\, R = \dim \mathrm{Ker}\, A$ であり，(15)の形から $\dim \mathrm{Ker}\, R = n - r = n - \mathrm{rank}\, A$ である．□

---

**注意**　行列の階数は，像空間の次元という幾何的な量であるというのが(16)である．階数を「基本変形で残る 1 の個数」と定義した段階では，それが基本変形の仕方によらずきまることは明らかではなかったが，像の次元と言うことによりこれも保証される．像の次元は基本変形によらずに意味を持つからである．

なお核の次元(17)を $A$ の nullity とよび，null $A$ とも書く．証明からわかるように，後半の主張(17)は前章の「経験則」(定理 12)を述べ直したものである．

---

定理でとくに $m < n$ のときを考えると，(17) $\geqq n - m > 0$．次元が 0 でなければ基底があり，とくに $\boldsymbol{0}$ でない元 $\boldsymbol{v}$ があるから，横長の $A$ には必ず $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ がある(このことは補題の証明にも現れた)．

**問**　$W = \{\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{4} x_j \boldsymbol{e}_j \,|\, x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\} \subset \boldsymbol{R}^4$ とする．$W$ が部分空間であることを示し，その次元を求めよ．

## 9.5　列変形の応用

例 3 では行変形によって像の基底を選ぶことについて述べた．一方，列変形を応用することもできるので紹介しておこう．

**例 4** $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ のとき．

$$\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0} \tag{19}$$

という関係式があり，3 つの列ベクトルは 1 次独立でない．$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$(あるいは，任意の 2 つの列)は 1 次独立で，これが $A$ の像 $\mathrm{Im}\, A$ の基底である．

(19)を $\boldsymbol{v} = {}^t[1, -2, 1] \in \mathrm{Ker}\, A$ とも読める($A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$)．次元定理より

$$\dim \mathrm{Ker}\, A = 3 - 2 = 1$$

だから，この $\boldsymbol{v}$ が核の基底となる．以上より

$$\mathrm{Im}\, A = \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}_1 \oplus \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}_2 \quad (2\text{ 次元}), \qquad \mathrm{Ker}\, A = \boldsymbol{R}\boldsymbol{v}. \ (1\text{ 次元})$$ □

関係式がすぐに見えない一般のときが問題だが，(19)は「$\boldsymbol{a}_3$ に他の 2 つの列を適当に加えて 0 にできる」と読め，これは列変形で扱った内容である．はきだし法の復習をかねて考えてみると，今の場合

$$A \xrightarrow{①} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \\ 10 & -9 & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 7 & -6 & 0 \\ 10 & -9 & 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

と列変形できる．つまり

$$A \xrightarrow{①} [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3 - 3\boldsymbol{a}_1] (= [\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \boldsymbol{a}'_3] \text{ と書こう})$$

と変形し，さらに $\xrightarrow{②} [\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \boldsymbol{a}'_3 - 2\boldsymbol{a}'_2]$ とすることで第 3 列が $\boldsymbol{0}$ になる．

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}'_3 - 2\boldsymbol{a}'_2 = (\boldsymbol{a}_3 - 3\boldsymbol{a}_1) - 2(\boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 \tag{21}$$

であるから，これでさっきの関係式(19)が得られた．

ここで各 $\boldsymbol{a}'_i$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合だが，基本変形は可逆なので $\boldsymbol{a}_i$ を $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \boldsymbol{a}'_3$ でも書ける．よって

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}'_1 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}'_2 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}'_3. \tag{22}$$

さらに変形しても同様で，第 3 列は最後に $\boldsymbol{0}$ になってしまったから $\mathrm{Im}\, A = \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}'_1 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}'_2$．$\boldsymbol{a}_1{}'$ と $\boldsymbol{a}_2{}'$ は(第 1 行をみれば明らかに！)1 次独立で，結局

$$\mathrm{Im}\, A = (22) = \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}'_1 \oplus \boldsymbol{R}\boldsymbol{a}'_2.$$

同様に(20) → $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 10 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ と進めば，この第1列と第2列も $\mathrm{Im}\,A$ の基底を与える． □

このように，列変形で

$$A \longrightarrow A' = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \quad\quad O}^{r} & 0 & \\ \ddots & \vdots & \cdots \\ O \quad\quad 1 & 0 & \cdots \\ * \;\; \cdots \;\; * & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ * \;\; \cdots \;\; * & 0 & \cdots \end{bmatrix} \qquad (r+1\text{ 列以降は }0)$$

と左上に単位行列を作れば，$A'$ のはじめの $r$ 列が $\mathrm{Im}\,A$ の基底となる．そして $(r+1)$ 列目以降におこった変形から，(21)のようにして $A$ の列ベクトルの間の関係式が得られ，核の情報を与える．これには列変形を記録できるようにしておくと便利だが，節を改めて説明しよう．

---

**注意**　上で「単位行列を作れば」と書いたが，一般に列変形によるゴールは行変形のときのゴールであった「階段型」行列(§8.4(10))の転置になる．そのときも，はじめの $\mathbf{0}$ でない $r$ 列が像の基底を与え，$\mathrm{Im}\,A$ の次元は $r = \mathrm{rank}\,A$ である．

---

**問**　$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ とする．像 $\mathrm{Im}\,A$，核 $\mathrm{Ker}\,A$ の基底を

(i)　$A$ の行変形を用いて(例3)求めよ．

(ii)　$A$ の列変形を用いて求めよ．

## 9.6　はき出し法のバージョンアップ

正方行列 $A$ の逆行列を求めるには，単位行列を $A$ の横に並べた $[A|E]$ に行変形を行った．$A$ が単位行列に変形されれば，左から $A^{-1}$ をかける変形が行われたことを意味するから，はじめ単位行列だった方に $A^{-1}E = A^{-1}$ が現れている．

つまり，横に単位行列を並べておけば行変形が記録できた．同様に縦方向にも単位行列を並べておけば列変形が記録できる．そこで $(m, n)$ 型の $A$ に対して，$E_m, E_n$ を $m$ 次，$n$ 次の単位行列として $\begin{bmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{bmatrix}$ を考えるわけである．(左下は使わないが，行列の形に体裁を整えるために 0 をおぎなっておく.) これは $m+n$ 次の正方行列になる．例 3 の $A$ の場合でみてみよう．次の $\tilde{A}$ を考えることになる．

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} E_4 & A \\ O & E_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 11 & 12 \\ \hline & & & & 1 & 0 & 0 \\ & O & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ほどこした列変形を再現すると，まず $A$ の第 1 列の 2 倍，3 倍を第 2 列，3 列から引いて

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & -9 & -18 \\ \hline & & & & 1 & -2 & -3 \\ & O & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

となる．囲んだ部分がさっきの $\boldsymbol{a}'_2$ で，この 2 倍をその次の列 $\boldsymbol{a}'_3$ から引けば $\mathbf{0}$ になる．

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & -9 & 0 \\ \hline & & & & 1 & -2 & 1 \\ & O & & & 0 & 1 & -2 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

後から 2 列目を $-3$ でわって ${}^t[0, 1, 2, 3]$ を作れば

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 3 & 0 \\ \hline & & & & 1 & 2/3 & 1 \\ & O & & & 0 & -1/3 & -2 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ここまで左半分を使ってないが，行変形すれば

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ \hline & & & & 1 & 2/3 & 1 \\ & O & & & 0 & -1/3 & -2 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & 1 & 2/3 & 1 \\ & O & & & 0 & -1/3 & -2 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left( = \begin{bmatrix} P & R \\ O & Q \end{bmatrix} \right)$$

となる．列変形で変化をうけた右下部分が，逆に行変形では変化しないことに注意しよう．上のように $P$ は左上の $4\times4$ 部分，$Q$ は右下の $3\times3$ 部分とすれば，$P$ が行変形を，$Q$ が列変形をそれぞれ「覚えて」くれている．検算しておこう．

$$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1 \\ 0 & -1/3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 10 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R.$$

この検算で $Q$ の3列目 ${}^t[1, -2, 1] = \boldsymbol{v}$ に $A$ を掛けて $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となったが，これが $\mathrm{Ker}\, A = \boldsymbol{R}\boldsymbol{v}$ に対応する．また $A$ に左から $P$ だけ掛けると，$PA$ は $A$ に行変形のみを施したものになる．以上で行変形と列変形を両方記録できるようになった．

---

本章では数の範囲を実数として考えたが，議論の本質は連立1次方程式論であり，複素数でももちろん大丈夫である．次章の課題としよう．

---

**問**　§9.5の問の $A$ に対し，$PAQ$ が階数標準形となる $P, Q$ を求めよ．

## 道案内

1）行列 $A$ の像や核は，図1のように連立1次方程式の状況を整理する上で基本的であるが，（やはり図1のように）直線・平面・…といった対象を高次元のベクトル空間で考えたことになっている．たとえば原点を通る空間の平面は，パラメータ表示により $\boldsymbol{Ra}+\boldsymbol{Rb}=\{s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}\mid s,t\in\boldsymbol{R}\}$ と，また方程式で $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ とも表せる．前者を一般に考えたのが $A=[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m]$ の像 $\mathrm{Im}\,A=\boldsymbol{Ra}_1+\cdots+\boldsymbol{Ra}_m$ である．また後者は $\mathrm{Ker}[\alpha,\beta,\gamma]$（$[\alpha,\beta,\gamma]:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$）として平面を考えており，これを一般に考えるのが核である．

2）本章では $(m,n)$ 行列 $A$ を，$x\mapsto A\boldsymbol{x}$ が定める写像 $f_A:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ と同じものとみなした（$f_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$）．記号の繁雑を避けたのだが，像は本来あらゆる写像に，核もあらゆる線型写像に対し考えられる．$m$ 成分の行ベクトル $\boldsymbol{y}=[y_1,\cdots,y_m]$ を $n$ 成分の行ベクトル $\boldsymbol{y}A$ にうつす線型写像 $g_A:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^n$（$g_A(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}A$）を考えると，像は $\boldsymbol{R}^n$ の，核は $\boldsymbol{R}^m$ の部分集合として定まる．これらを $A$ の**行空間**，**左核**ともいう．

## 練習問題

**9-1**　$A=\begin{bmatrix}1&3&0&1&3\\1&2&1&2&0\\-1&1&-4&3&1\\-1&-2&-1&-2&0\end{bmatrix}=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{v}_5]$ とする．

（i）$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{v}_5$ が張る $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間 $W(=\mathrm{Im}\,A)$ の基底を1組求めよ．また $A$ の核の基底を1組求めよ．

（ii）図3にあたる絵を描け．

**9-2**　それぞれについて像と核の基底と次元を求め，それらの次元を答えよ．

（i）$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$　（ii）$\begin{bmatrix}0&3\\2&2\\1&0\end{bmatrix}$　（iii）$\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$

（iv）$\begin{bmatrix}0&2&-1\\5&1&2\\3&1&1\\2&2&0\end{bmatrix}$　（v）$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{bmatrix}$

**9-3**　（i）対偶命題を述べよ．「$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m\in\boldsymbol{R}^n$ が1次独立でないならば，すべては0でない実数 $c_1,\cdots,c_m$ が存在し $c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_m\boldsymbol{v}_m=\boldsymbol{0}$ となる．」

（ii） $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ は線型写像とする．$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ が1次従属ならば $f(\boldsymbol{v}_1), \cdots, f(\boldsymbol{v}_k)$ も1次従属であることを示せ．また，この対偶を述べよ．

**9-4** 次の部分空間 $W_1, W_2, W_3 \subset \boldsymbol{R}^3$ がすべて一致することを示せ：

$$W_1 := \boldsymbol{R}\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}+\boldsymbol{R}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}, \qquad W_2 := \mathrm{Im}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 3 & -1\\5 & 3 & 1\end{bmatrix},$$

$$W_3 := \{{}^t[x, y, z] \mid 3x+2y-z = 0\}.$$

**9-5** $A, B, C$ は同じサイズの行列で，$A = B+C$ であるとする．

（i） $\mathrm{Im}\,A \subset \mathrm{Im}\,B+\mathrm{Im}\,C$ を示せ．

（ii） $\mathrm{Im}\,A = \mathrm{Im}\,B+\mathrm{Im}\,C$ でない $A, B, C$ の例を1組あげよ．

**9-6** （i） 行列 $A, B$ の積について $\mathrm{rank}\,AB \leqq \mathrm{rank}\,A, \mathrm{rank}\,B$ を示せ．

（ii） 次の $A, B$ について $AB = O$ を示せ．また $\mathrm{Ker}\,A = \mathrm{Im}\,B$ を示せ．

$$A := \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & -2\\0 & -3 & 2 & 1\end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\\1 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}.$$

（iii） $A$ は $(l, m)$ 型，$B$ は $(m, n)$ 型で $AB = O$ とする．$\mathrm{Ker}\,A \supset \mathrm{Im}\,B$ を示せ．また等号のための条件を $A, B$ の階数を用いて述べよ．

# 10章：正規直交基底など

部分空間や次元などについて，数(スカラー)の範囲を複素数も許して考えよう．スカラーの範囲を記号 $\boldsymbol{K}$ で表す：$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$．同様に，$\boldsymbol{K}^n$ で $\boldsymbol{R}^n$ または $\boldsymbol{C}^n$ という $n$ 成分の列(縦)ベクトル全体を表す．復習をかねて，1次独立性に関する典型的な議論からはじめよう．

## 10.1 1次独立性と基底再論

$\boldsymbol{R}^n$ の部分空間(部分ベクトル空間)とは，和とスカラー倍で閉じた部分集合 $W$ であった(§9.1)．スカラーの範囲が複素数に変わっても，同様に

$$W \subset \boldsymbol{K}^n \text{ が部分空間} :\Longleftrightarrow c\boldsymbol{w}+c'\boldsymbol{w}' \in W$$

$$(\text{すべての } \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in W,\ c, c' \in \boldsymbol{K} \text{ について})$$

と定義する．ベクトルの組 $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_d\} \subset \boldsymbol{K}^n$ を1次独立とよぶのも，$\boldsymbol{0}$ を表す1次結合は「自明」なものしかないという条件(定義13)

$$c_1\boldsymbol{w}_1+\cdots+c_d\boldsymbol{w}_d=\boldsymbol{0} \quad (c_i \in \boldsymbol{K}) \Longrightarrow c_1=\cdots=c_d=0 \tag{1}$$

が成り立つときである．対偶をとれば，条件(1)は次と同値である．

$$c_1, \cdots, c_d \text{ のどれかが } 0 \text{ でない} \Longrightarrow c_1\boldsymbol{w}_1+\cdots+c_d\boldsymbol{w}_d \neq \boldsymbol{0} \tag{2}$$

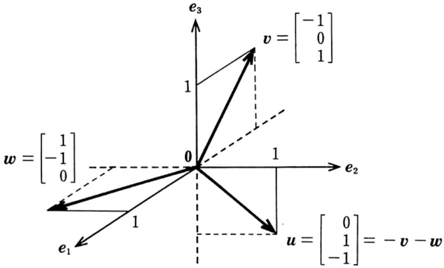



**図1** 互いに独立でない3つの空間ベクトルの例

(1), (2)は実際 $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_d\}$ が「独立な方向をもつ」ことの数学的表現である．これを納得するため，1次独立でないとき(＝**1次従属**のとき)を考える．条件を書けば，(1)の否定だから

$$\text{ある } [c_1, \cdots, c_n] \neq \boldsymbol{0} \text{ に対し } c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{0} \tag{3}$$

である．このとき，たとえば $c_j \neq 0$ ならば，$\boldsymbol{v}_j$ の項のみを移項して

$$\boldsymbol{v}_j = -\frac{1}{c_j}(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_{j-1}\boldsymbol{v}_{j-1} + c_{j+1}\boldsymbol{v}_{j+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n)$$

と書ける．すなわち，たしかに $\boldsymbol{v}_j$ はこれ以外の $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{j-1}, \boldsymbol{v}_{j+1}, \boldsymbol{v}_n$ に「従属して」いる．(3)を否定したのが(1)あるいは(2)である．

**例1**　1次従属である例として，次のような場合が挙げられる．(ベクトルはいずれも原点を始点とする $\boldsymbol{0}$ でない位置ベクトルとしよう．)

**ア)**　2つの平面ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が一直線上にある($\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{u}$)．

**イ)**　3つの空間ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が同一平面上にある(図1)．

イ)の場合，たとえば $\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{w} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}$ と書ける($\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ に従属している．図1では $a = b = -1$)．これは $c = -1$ として

$$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \quad \text{は} \quad a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \quad \text{をみたす} \tag{4}$$

と書き換えれば3つのベクトルの役割を同じにでき，その一般形が(3)である．(2つのベクトルが一直線上にあるときも，$a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ と書ける．)
逆に(4)で $a, b, c$ のどれかが0でなければ(たとえば $a \neq 0$ なら)

$$\boldsymbol{u} = -\frac{1}{a}(b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w})$$

とでき，$\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ で書ける．しかし $a = b = c = 0$ なら，もはや $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ のどれもほかでは書けない．これが独立な場合(1), (2)である．　□

$W$ の1次独立な元の組 $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_d\}$ を，$W$ の**独立系**ともよぶ．部分空間 $W$ の独立系であって，$W$ の**すべての**元を，1次結合

$$\boldsymbol{w} = c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_d\boldsymbol{w}_d \qquad (c_i \in \boldsymbol{K})$$

として表せるものを $W$ の基底とよぶ．そして，個数 $d$ を $W$ の次元 $\dim W$ と定める．これは $W$ の元を表す座標系ができるということだから，$W$ の独立系で元の個数が最大のものをとればよいだろう：

**定理15**　$\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_d\}$ は部分空間 $W$ の独立系で，これにどんな $W$ の元を加えても1次独立でなくなるとする．このとき $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_d\}$ は $W$ の基底であり，$d = \dim W$ である．

---

定理の内容を，国語辞典的に「次元とは独立な方向がいくつあるかを示す数」とも言えるだろう．これは日常の感覚と一致しており，さらに経験が及ばないときにも使えることがメデタイ．

---

**証明**　どんな元 $\boldsymbol{w}$ を付加しても，$\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_d, \boldsymbol{w}\}$ はもはや1次独立ではないとする．すると「従属関係」

$$c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_d\boldsymbol{w}_d + c\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \tag{5}$$

があって，$c_1, \cdots, c_d, c$ のいずれかは $\boldsymbol{0}$ でない．ここで $c = 0$ なら

$$c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_d\boldsymbol{w}_d = \boldsymbol{0},$$

かつ $[c_1, \cdots, c_d] \neq \boldsymbol{0}$．これは $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_d\}$ の独立性に反するから，$c \neq 0$ である．よって(5)より，$\boldsymbol{w}$ は $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_d\}$ で書ける：

$$\boldsymbol{w} = -\frac{1}{c}(c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_d\boldsymbol{w}_d).$$ □

---

**注意**　このとき，表示が一通りであることも見やすい．

$$\boldsymbol{w} = c_1'\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_d'\boldsymbol{w}_d$$

でもあったとしよう．引き算すれば

$$\left(c_1' + \frac{c_1}{c}\right)\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \left(c_d' + \frac{c_d}{c}\right)\boldsymbol{w}_d = \boldsymbol{0}.$$

よって $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_d\}$ の1次独立性より

$$c_1' = -\frac{c_1}{c}, \quad \cdots, \quad c_d' = -\frac{c_d}{c}.$$ □

---

一方，独立系 $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_k\}$ がまだ基底でなければ，これを補って $W$ の基底にできる．(したがって，さらに補って全空間 $\boldsymbol{K}^n$ の基底も得られる．)

実際 $\boldsymbol{K}\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{K}\boldsymbol{w}_k \neq W$ なら，ある $\boldsymbol{w} \in W$ は $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_k\}$ で書けない．これは $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{w}\}$ が1次独立であることを意味する((5)以下と同様：従属関係 $c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{w}_k + c\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ があると，$c = 0$ なら $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_k\}$ の独立性に反するので，$\boldsymbol{w} = -c^{-1}(c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{w}_k)$ となり $\boldsymbol{w} \in W$．これは矛盾)．これでも $W$ の基底でなければある $\boldsymbol{w}'$ を補い，… と続けると，最後には $W$ の基底になる．(「最後」とはどんな $\boldsymbol{w} \in W$ を加えても独立性が破れるとき，よって定理に示したように基底となる．)

このように元を補って基底にすることを**基底の延長**という．§9.3 で見

たように次元は一定であるので，$(\dim W-k)$個補えばよい：

**定理 16**(**基底の延長**)　$\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_k\}$が部分空間$W$の独立系のとき，これに$(\dim W-k)$個の元を補い$W$の基底にできる．　□

**例 2**　$\boldsymbol{C}^3$の部分空間$W=\{{}^t[x, y, 0] \mid x, y \in \boldsymbol{C}\}$の基底として，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$がとれる：したがって$W$は**複素**2次元で，むりやり「平面」ともよぶ(同様に1次元部分空間を「直線」ともよぶ)．これを$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$と補えば$\boldsymbol{C}^3$の基底になる．

なお1次結合の係数(スカラー倍)を実数に限るなら，あらかじめ(たとえば)$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, i\boldsymbol{e}_1, i\boldsymbol{e}_2$の4つを用意する必要があり，この$W$の**実次元**は4である．必要に応じ，実次元を$\dim_{\boldsymbol{R}}$，複素次元を$\dim_{\boldsymbol{C}}$とも書く：$\dim_{\boldsymbol{C}} W=2$，$\dim_{\boldsymbol{R}} W=4$．

**例 3**　$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-i & 0 \\ i & 1 & 1+i & 1+i \\ 0 & -i & 0 & 1-i \end{bmatrix}=[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4]$とする．

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1+i \\ 0 & -i & 0 & 1-i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

と行変形できる．この結果を$[\boldsymbol{w}_1', \boldsymbol{w}_2', \boldsymbol{w}_3', \boldsymbol{w}_4']$とすれば，$\boldsymbol{w}_3'=(1-i)\boldsymbol{w}_1'$，$\boldsymbol{w}_4'=(1+i)\boldsymbol{w}_2'$．よってもともと$\boldsymbol{w}_3=(1-i)\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_4=(1+i)\boldsymbol{w}_2$である．$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$は1次独立であるから，これらが$A：\boldsymbol{C}^4 \to \boldsymbol{C}^3$の像の基底である：

$$\operatorname{Im} A=\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}_2+\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}_3+\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}_4=\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}_1 \oplus \boldsymbol{C}\boldsymbol{w}_2.$$

$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$に$\boldsymbol{e}_1$を補えば，(これらが互いに独立で，全空間の次元と同じ3個になったから)$\boldsymbol{C}^3$の基底が得られる．一方上の変形より，$\operatorname{Ker} A \subset \boldsymbol{C}^4$の元も$z_1{}^t[1-i, 0, -1, 0]+z_2{}^t[0, 1+i, 0, -1]$ $(z_1, z_2 \in \boldsymbol{C})$の形とわかる．つまり$\operatorname{Ker} A=\boldsymbol{C}\,{}^t[1-i, 0, -1, 0] \oplus \boldsymbol{C}\,{}^t[0, 1+i, 0, -1]$．像$\operatorname{Im} A$が(複素)2次元だから核は$4-2=2$次元のはずだが(次元定理)，たしかに正しい．

---

**注意**　和とスカラー倍で閉じた$\boldsymbol{K}^n$の部分集合を部分ベクトル空間とよび，その次元などを考えた．議論を$\boldsymbol{K}^n$に限ったのは話の都合にすぎない．高校以来の数べ

クトルに限らず，和とスカラー倍がある集合をベクトル空間とよび，そこでも1次独立性や基底の概念が基本的である(14章)．

例として，$(m, n)$行列の全体 $M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ がある．これも和とスカラー倍という演算がある点では数ベクトル空間と同じ．行列単位たち $\{E_{j,k}\}$ はひとつの基底を与え，$\dim_{\boldsymbol{K}} M_{m,n}(\boldsymbol{K}) = mn$ である．

(1変数)関数の全体も，ひとつのベクトル空間とみなせる．そこに問題に応じてよい基底をとることは画像データの圧縮などでも基本的で，国際規格 jpeg2000 では離散ウェーブレットとよばれる基底が用いられている．□

---

**問**　$\boldsymbol{R}^4$ の部分空間 $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \middle| \sum_{j=1}^{4} x_j = 0 \right\}$ の元 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を適当に補い，$W$ の基底にせよ．またさらに補って $\boldsymbol{R}^4$ の基底にせよ．

## 10.2 部分空間の和と共通部分

$U, V$ を $\boldsymbol{K}^n$ の2つの部分空間とするとき，$\boldsymbol{K}^n$ の部分集合

$$\{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{u} \in U,\ \boldsymbol{v} \in V\} \subset \boldsymbol{K}^n$$

を $U+V$ と書き，$U$ と $V$ の**和**(和空間)または $U$ と $V$ で張られる(**生成される**)空間とよぶ．また，$U$ と $V$ の**共通部分**(交差，交わり)

$$U \cap V = \{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in U \text{ かつ } \boldsymbol{v} \in V\} \subset \boldsymbol{K}^n$$

も考えられる．3つ以上の空間の和や共通部分も同様に考える．

**補題**　$U+V$，$U \cap V$ はともに $\boldsymbol{K}^n$ の部分ベクトル空間である．

**証明**　$U+V$ については，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in U$，$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V$，$k, k' \in \boldsymbol{K}$ のとき

$$k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+k'(\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{v}') = (k\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{u}')+(k'\boldsymbol{v}+k'\boldsymbol{v}') \in U+V$$

よりわかる．(なお，和集合 $U \cup V$ は図2でいえば2つの平面の上の点全体で，一般に和とスカラー倍で閉じない．$U \cup V$ を含む最小の部分空間が $U+V$ である．)　$U \cap V$ については，$\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in U \cap V$，$k, k' \in \boldsymbol{K}$ のとき $k\boldsymbol{w}+k'\boldsymbol{w}'$ は $U$ にも $V$ にも属し，つまり $k\boldsymbol{w}+k'\boldsymbol{w}' \in U \cap V$ である．□

たとえば空間 $\boldsymbol{R}^3$ では，異なる2平面の交わりは直線(1次元)である(図

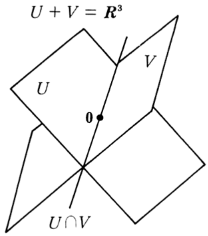



図2　$\dim(U+V)=3$,
$\dim U=\dim V=2$,
$\dim(U\cap V)=1$ のとき．

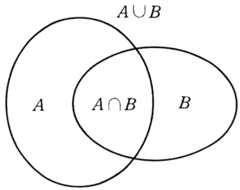



図3　集合の和 $A\cup B$ と共通部分 $A\cap B$．
個数について，「包除の定理」$|A\cup B|$
$=|A|+|B|-|A\cap B|$ が成り立つ．

2)．また，有限集合 $A$ の元の個数を $|A|$ などと書けば

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

が成り立つ(包除の原理，図3)．次元について同様の性質を述べるのが次の定理で，基底を使って自由度の「重なり」に注目すればわかる．

**定理 17**　$\dim(U+V)=\dim U+\dim V-\dim(U\cap V)$．

**証明**　まず $U\cap V$ の基底 $\{\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_d\}$ をとる($d=\dim(U\cap V)$)．これに $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_k\in U$ を補い

$$\{\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_d,\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_k\} \tag{7}$$

を $U$ の基底にする($d+k=\dim U$：定理16)．また $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_l\in V$ を補い

$$\{\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_d,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_l\} \tag{7'}$$

を $V$ の基底にする ($d+l=\dim V$)．このとき

$$\{\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_d,\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_k,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_l\} \tag{8}$$

が $U+V$ の基底になれば，定理は次の形で成り立つことになる．

$$\dim(U+V)=d+k+l=(d+k)+(d+l)-d. \tag{9}$$

(8)で任意の $U+V$ の元 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}\in U,\boldsymbol{v}\in V)$ が表されることは，$\boldsymbol{u}$ が(7)の，$\boldsymbol{v}$ が(7′)の和で表されるから明らか．そこで(8)が1次独立なら証明がおわる．$\sum_{p=1}^{d}a_p\boldsymbol{w}_p+\sum_{q=1}^{k}b_q\boldsymbol{u}_q+\sum_{r=1}^{l}c_r\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{0}$ としよう．これを

$$\sum_{p=1}^{d}a_p\boldsymbol{w}_p+\sum_{q=1}^{k}b_q\boldsymbol{u}_q=-\sum_{r=1}^{l}c_r\boldsymbol{v}_r \tag{10}$$

と移項すると，左辺 $\in U$，右辺 $\in V$．よって両辺は共通部分 $U\cap V$ の元であり，$\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_d$ の和で書ける．ところが右辺に現れる $\{\boldsymbol{v}_r\}$ は(7′)で $\{\boldsymbol{w}_p\}$ と独立に選んだから，$-\sum_{r=1}^{l} c_r\boldsymbol{v}_r = \sum_{i=1}^{d} a_i{}'\boldsymbol{w}_i$ ならすべての係数は 0．つまり $c_1 = \cdots = c_l = 0$，(10) $= \boldsymbol{0}$ であり，(7)の独立性から $a_p, b_q$ もすべて 0 となる．これで(8)が $U+V$ の基底とわかった．□

**定義 14**　部分空間 $U, V, W \subset \boldsymbol{K}^n$ について

$$U\cap V = \{\boldsymbol{0}\} \quad かつ \quad W = U+V \tag{11}$$

が成り立つとき，$W$ は $U$ と $V$ の**直和**(direct sum)であるといい $W = U\oplus V$ と書く．また，$U$ を $V$ の($V$ を $U$ の) $W$ における**補空間**という．

**注**　条件 $U\cap V = \{\boldsymbol{0}\}$ は $\dim(U+V) = \dim U+\dim V$ と言っても同じで，2 つの部分空間 $U, V$ の方向にムダ(共通部分)がない場合である．

また $U = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$，$V = \boldsymbol{K}\boldsymbol{v}$(ともに 1 次元)のときは，条件(11)は $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が 1 次独立かつ $W$ を張る，と読める．つまり $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ は $W$ の基底で，よって前章の記法 $W = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}\oplus\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}$ と矛盾しない．□

**例 4**　空間 $\boldsymbol{R}^3$ において，原点を通る平面 $\Pi$ とやはり原点を通り $\Pi$ に含まれない直線 $L$ をとる．$\Pi\cap L = \{\boldsymbol{0}\}$ かつ $\Pi+L = \boldsymbol{R}^3$ であり，$\Pi$ と $L$ は互いに他方の補空間である：$\boldsymbol{R}^3 = \Pi\oplus L$(図 4)．□

基底による表示と同様，$W = U\oplus V$ ならば $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{u}\in U, \boldsymbol{v}\in V$) と表す方法は一通りである：実際，$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}'+\boldsymbol{v}'$ としよう．$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}$ と移項すれば，左辺は $U$，右辺は $V$ に属すから，$U\cap V = \{\boldsymbol{0}\}$ ならこれらは $\boldsymbol{0}$．つまり $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'$，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'$．これより，一般に $U\cap V$ の分だけ表し方の不定性($\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'$ および $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'$)が出ることもわかる．

$m$ 個の部分空間 $V_1, \cdots, V_m$ の和 $W = V_1+\cdots+V_m$ についても，任意の $\boldsymbol{w}\in W$ が各 $V_j$ の元 $\boldsymbol{v}_j$ の和で $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{v}_m$ と一意的に表せるとき $W = V_1\oplus\cdots\oplus V_m$ と書く．各 $V_j$ が 1 次元で $V_j = \boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_j$ ならば，これは $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ が $V$ の基底ということである．

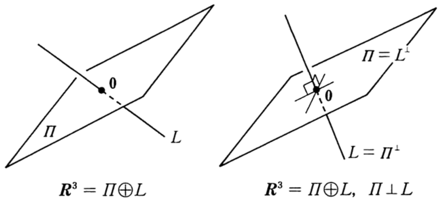



図4　直和と直交直和(§ 10.5)

---

一般に $W = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ であるためには($V_j$ とそれ以外に分けて考えれば),

$$V_j \cap (V_1 + \cdots + V_{j-1} + V_{j+1} + \cdots + V_m) = \{\mathbf{0}\} \qquad (j = 1, \cdots, m)$$

が必要で，十分でもある：$m = 3$ で考えれば，条件より $W = V_1 \oplus (V_2 + V_3)$．ここで $V_2 \cap V_3$ は $V_2 \cap (V_1 + V_3) = \{\mathbf{0}\}$ の一部だから，やはり $\{\mathbf{0}\}$．よって $W = V_1 \oplus (V_2 + V_3) = V_1 \oplus (V_2 \oplus V_3)$．これは $W$ の元が $V_1, V_2, V_3$ の元の和で一意的に書けることを意味し，カッコはとってよい．

---

**問**　$\boldsymbol{R}^4$ の次の部分空間 $U_1, U_2$ および $U_1 \cap U_2$，$U_1 + U_2$ の次元はそれぞれいくつか：$U_1 = \{\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, x_2, x_3, x_4] \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}$,

$$U_2 = \mathrm{Im}\, A, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^4.$$

## 10.3　正規直交基底

$\boldsymbol{R}^n$ を平面，空間，… の拡張とみて内積 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = {}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{w}$ できまる「長さ」や「角度」(6章)を考えるときは，長さ1(正規)で互いに直交する基底，すなわち**正規直交基底**を考えるのが自然である[1)]．

$\boldsymbol{C}^n$ でも長さや直交性を考えるには,

$$\boldsymbol{v} = {}^t[x_1, \cdots, x_n], \quad \boldsymbol{w} = {}^t[y_1, \cdots, y_n] \in \boldsymbol{C}^n$$

に対し $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \bar{x}_1 y_1 + \cdots + \bar{x}_n y_n \in \boldsymbol{C}$ で定まる**エルミート内積**を使えばよかった(§ 6.6)．$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2$，$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ である．

$$\boldsymbol{v}^* = [\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n] = {}^t\bar{\boldsymbol{v}} \qquad (\text{行ベクトル})$$

と書けば，$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}^*\boldsymbol{w}$ と書ける．簡単にわかる性質をまとめよう：

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \overline{(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})} \tag{12}$$

$$(\boldsymbol{v},\, k\boldsymbol{w}+k'\boldsymbol{w}') = k(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w})+k'(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}') \tag{13}$$

$$(k\boldsymbol{v}+k'\boldsymbol{v}',\, \boldsymbol{w}) = \bar{k}(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w})+\bar{k}'(\boldsymbol{v}',\, \boldsymbol{w}) \tag{13'}$$

$$(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{v}) \geqq 0, \qquad (\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{v}) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = 0 \tag{14}$$

ここで $k, k' \in \boldsymbol{C}$ である．(14)によって，$\boldsymbol{v}$ の長さ $|\boldsymbol{v}| := \sqrt{(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{v})}$ を考えることができる．もはや目に見えないが，$(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}) = 0$ のとき $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ は**直交する**といい，$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}$ と書く．**コーシー-シュワルツの不等式**

$$|(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w})| \leqq |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{w}| \qquad (\text{等号は } \boldsymbol{v} = c\boldsymbol{w},\ c \in \boldsymbol{C} \text{ のとき}) \tag{15}$$

も成り立つが，証明は実ベクトルのときに比べ少し厄介である．

**(15)の証明**(図5)　$t \in \boldsymbol{C}$ として，$|\boldsymbol{v}+t\boldsymbol{w}|^2 = |\boldsymbol{v}|^2+t(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w})+\bar{t}(\boldsymbol{w},\, \boldsymbol{v})+|t|^2|\boldsymbol{w}|^2$ を考える．$t$ を $(\boldsymbol{v}+t\boldsymbol{w}) \perp \boldsymbol{w}$ のように選べば，$t = -\dfrac{(\boldsymbol{w},\, \boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{w}|^2}$．このとき $0 \leqq |\boldsymbol{v}+t\boldsymbol{w}|^2 = |\boldsymbol{v}|^2 - \dfrac{|(\boldsymbol{w},\, \boldsymbol{v})|^2}{|\boldsymbol{w}|^2}$．

なお $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ とも実ベクトルなら，$t$ の2次式 $|\boldsymbol{v}+t\boldsymbol{w}|^2 \geqq 0$ の判別式 $\leqq 0$ から結論できる．□

以下 $\boldsymbol{R}^n$ では ${}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}$ で，$\boldsymbol{C}^n$ では $\boldsymbol{v}^*\boldsymbol{w}$ で内積 $(\boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w})$ を考え，両方の話を同時に進めよう．

$\boldsymbol{K}^n (= \boldsymbol{R}^n,\, \boldsymbol{C}^n)$ のベクトルの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ $(m \leqq n)$ が $(\boldsymbol{u}_j,\, \boldsymbol{u}_k) = \delta_{j,k}$ をみたすとき(**正規直交系**)を考えよう．このとき

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+c_m\boldsymbol{u}_m \qquad (c_j \in \boldsymbol{K})$$

とすると，$c_j = (\boldsymbol{u}_j,\, \boldsymbol{v})$．(基本ベクトルで書くときと同様！)　とくに $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ ならすべての $c_j = 0$ となるから，$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ は1次独立である．次元と個数が同じ $(m = n)$ なら基底になり，一般の $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{v})+\cdots+\boldsymbol{u}_n(\boldsymbol{u}_n,\, \boldsymbol{v}) \tag{16}$$

(係数を右に書いた)と表せることになる．一般に，$\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ とするとき

$$\frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{u}|^2} = \frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|},\, \boldsymbol{v}\right) \in \boldsymbol{K}^n \tag{17}$$

を $\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ 方向への**正射影**(**直交射影**)とよぶが，正射影の和が元のベクトルになるわけである(図6)．

**例5**　次の行列の列ベクトルは $\boldsymbol{C}^3$ の正規直交基底となる：

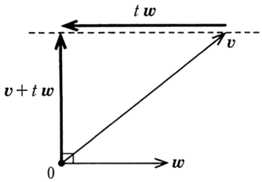



**図 5**　不等式(15)の証明

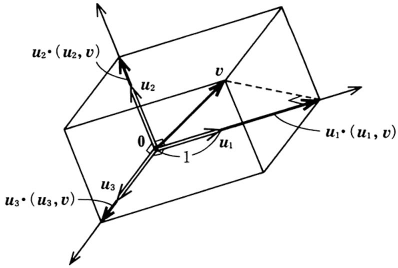



**図 6**　正規直交基底と正射影

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \omega & \omega^2\\ 1 & \omega^2 & \omega^4\end{bmatrix} \qquad \left(\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\text{ は 1 の 3 乗根}\right)$$

(確かめよう.)　一般に $n=1,2,3,\cdots$ に対し，複素数

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\ (=e^{2\pi i/n}:\S\,5.5)$$

を考える．$\omega^k=\cos\dfrac{2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{2\pi k}{n}\ (=e^{2\pi ik/n})$ であり，$\omega$ は $\omega^n=1$ かつ $n$ 乗してはじめて 1 となる，1 の**原始 $n$ 乗根**(のひとつ)である．すると

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & & \omega^{n-1}\\ & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & & \omega^{(n-1)(n-1)}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n]$$

の列ベクトル $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$ は $\boldsymbol{C}^n$ の正規直交基底をなす：$\bar{\omega}=\omega^{-1}$ より，

$$(\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{v}_l)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\omega^{(j-1)(k-1)}}\,\omega^{(j-1)(l-1)}=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{j(l-k)}=\delta_{k,l}.$$

(最後は $1+x+\cdots+x^{n-1}=\dfrac{x^n-1}{x-1}\ (x\neq 1)$ を用いた！)　この基底で $\boldsymbol{C}^n$ の元を(17)のように表すことは**有限フーリエ変換**ともよばれる．　□

**問**　$\boldsymbol{C}^3$ の元 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}1\\i\\-i\end{bmatrix}$ を例 5 の基底 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ で表せ．

## 10.4　シュミットの直交化

(16)のように，正規直交基底はなじみのある直交座標系を忠実に一般化したものである．ここでは勝手な基底$\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$から出発して，正規直交基底に作りかえる方法を説明しよう．

**Step 1**　まず $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1$ とおく．次に

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_2 + a\boldsymbol{w}_1$$

が，$\boldsymbol{w}_1$ と直交するようにする．

$$0 = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2) + a(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)$$

より，$a = -\dfrac{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}$ である．$\boldsymbol{v}_2$ は $\boldsymbol{w}_2$ が「初項」なので，自動的に $\boldsymbol{w}_1$ とは独立である．特に $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2) \neq 0$.

**Step 2**　次に

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{w}_3 + b\boldsymbol{v}_1 + b'\boldsymbol{v}_2$$

を，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ と直交するようにする．上と同様

$$0 = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}_3) + b(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1), \qquad 0 = (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_3) + b'(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2),$$

$(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i) \neq 0$ なので，これで $b, b'$ がきまる．

**Step 3**　以下これを繰り返す：$\boldsymbol{v}_k$ は，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{k-1}$ と直交するように

$$\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{w}_k + (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{k-1} \text{ の 1 次結合})$$
$$(= \boldsymbol{w}_k + (\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_{k-1} \text{ の 1 次結合}))$$

の形できめる．

$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = 0$ ならば，$\boldsymbol{w}_k$ の係数をみて $c_k = 0$. 以下同様にして $c_1 = \cdots = c_k = 0$ となり，$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k\}$ は1次独立．$k = n$ までやれば，$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ が基底になる．あとは $\boldsymbol{u}_k := \dfrac{1}{|\boldsymbol{v}_k|}\boldsymbol{v}_k$ と正規化すればよい．□

与えられた基底から正規直交基底を得る上の方法を，**シュミットの直交化**という．じつはこの直交化は，$\boldsymbol{R}^3$ の向きについて説明したときに出てきている(7章定理9)：平行6面体をある辺を規準にして直方体に，さらに立方体にする操作がそれである．この操作は1番目に対して2番目を直交させ，そして3番目をこれらと直交させ，最後に長さを1に正規化するもので，シュミットの直交化に他ならない．

**例 6** $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とする．この3つのベクトルは1次独立である．これらをこの順に正規直交化すると，Step 1 で $a = -1$，Step 2 で $b = b' = -1$．結局 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ を得る．一方，これらを並べかえた $[\boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1]$ からは，まず $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{w}_3$，$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_2 - \frac{2}{3}\boldsymbol{w}_3 = {}^t\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right]$，$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{w}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_2 = {}^t\left[\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right]$ を得る．正規化すれば次の $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を得る．

$$[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

□

---

**注意** 上の例のように，正規直交化の結果は順番による．そこで，順番が違えば違う基底とみなすときは「順序基底」ともよぶ．

---

ところで，Step 1-3 でできた正規直交基底を並べると

$$[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]\begin{bmatrix} |\boldsymbol{v}_1|^{-1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & |\boldsymbol{v}_n|^{-1} \end{bmatrix},$$

$$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n] = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 + a\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_3 + b\boldsymbol{w}_1 + b'\boldsymbol{w}_2, \cdots]$$

$$= [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n]\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a & b & \cdots & * \\ & 1 & b' & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \\ & O & & \ddots & * \\ & & & & 1 \end{bmatrix}}_{N}$$

とまとめられる．最後に現れた上三角行列を $N$ と書けば，対角成分が0でないので逆行列をもち，$N^{-1}$ はまた上三角である(8章)．よって

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n] &= [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]\, N^{-1} \\ &= [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n]\operatorname{diag}(|\boldsymbol{v}_1|, \cdots, |\boldsymbol{v}_n|)\, N^{-1}. \end{aligned} \tag{19}$$

これは，任意の可逆行列 $[\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n]$ が正規直交基底をならべた $Q := [\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n]$ と上三角行列 $R := \operatorname{diag}(|\boldsymbol{v}_1|, \cdots, |\boldsymbol{v}_2|)N^{-1}$ の積で書ける，と読む．これを(左辺の)**QR分解**とか**岩澤分解**[2)]とよぶ．(18)の例で見れば

$$[\boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^{-1}.$$

**問**　$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする．これらを前から順に正規直交化せよ．また後ろから順に正規直交化せよ．

## 10.5　直交補空間

$W$ を $\boldsymbol{K}^n$ の部分空間としよう．内積を使うなら，補空間も直交する方向にとるべきだろう(図 4)．$W$ と直交する「法線」を全部もってきて

$$W^{\perp} := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}^n \mid \text{すべての } \boldsymbol{w} \in W \text{ に対し } (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0\}$$

と書こう．$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}) = 0$ なら $(c\boldsymbol{v} + c'\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}) = 0$ なので，$W^{\perp}$ は部分空間．$W^{\perp}$ を $W$ の($\boldsymbol{K}^n$ における)**直交補空間**とよぶ．

$W$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_d\}$ $(d = \dim W)$ をとり，これを全空間 $\boldsymbol{K}^n$ に延長し直交化した正規直交基底を $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$ としよう．すると

$$W^{\perp} = \{\boldsymbol{v} \mid k = 1, \cdots, d \text{ に対し} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_k) = 0\}$$
$$= \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j w_j \,\middle|\, c_1 = \cdots = c_d = 0 \right\}.$$

つまり，$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{w}_n \in \boldsymbol{K}^n$ を

$$\boldsymbol{v} = (c_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_d\boldsymbol{w}_d) + (c_{d+1}\boldsymbol{w}_{d+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{w}_n) \tag{20}$$

と分けて書けば，前半が $W$ に，後半が $W^{\perp}$ に属する(とくに，$W^{\perp}$ は $W$ の補空間である！)　(20)による直和分解 $\boldsymbol{K}^n = W \oplus W^{\perp}$ を**直交直和**とよぶ．

**問**　それぞれユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3, \boldsymbol{R}^4$ の次の部分空間を考える．

(i)　$V = \boldsymbol{R}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \subset \boldsymbol{R}^3$,　　(ii)　$W := \boldsymbol{R}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \boldsymbol{R}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \subset \boldsymbol{R}^4$

一般の元 $\boldsymbol{x}$ の $V, W$ への正射影，および直交補空間への正射影を求めよ．

---

2次元・3次元ベクトルの1次独立性と2次・3次の行列式の関係に触れるべきだったが，11～12章において $n$ 次行列式を扱う中で説明しよう．

ところで部分空間はいくつのパラメータで決まるだろうか．平面 $\boldsymbol{R}^2$ で原点を通る直線は，方向を単位円上の点で指定すればきまるから，角度のみで決定される．

同様に，空間 $\boldsymbol{R}^3$ で原点を通る直線を指定するには，球面上の1点が方向をきめるから，緯度と経度の2個パラメータが必要である．空間の場合は，(やはり原点を通る)平面を考えることもできるが，法線方向を考えれば直線を指定するのと同じ：やはり2個のパラメータできまる．

一般に $n$ 次元空間内の $d$ 次元部分空間 $W$ を考える．$W$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_d\}$ を決めるには，成分の数 $nd$ 個のパラメータが必要．しかし，これでは $W$ の座標系まで指定している．平面の斜行座標の網目をとりかえるのは可逆な2次行列で，それらは4次元だけある：一般には $d^2$ 次元あるだろう($W$ の元を $c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_d\boldsymbol{v}_d$ と書くとき，パラメータ(座標) $[c_1, \cdots, c_d]$ を(可逆な) $d$ 次行列 $A$ 倍でとりかえても，$W$ の元を表すことに変りはない)．この自由度を用い部分空間の基底をとりかえるのは，基底をならべた行列を列変形することにほかならない(§9.5)．そこで

$$[\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_d] \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \\ * & \cdots & * \\ & \vdots & \\ * & \cdots & * \end{bmatrix} \tag{21}$$

とできれば，下の $(n-d)d$ 個の成分が問題の部分空間をきめる(上の部分が列変形で単位行列にできることを仮定したが，変形の途中で対角線に0が出て困るのは，出てこないときより特殊と考えられる．幾何的には，$W$ から $\boldsymbol{K}^d=\{{}^t[x_1, \cdots, x_d, 0, \cdots, 0] \in \boldsymbol{K}\}$ への「はじめの $d$ 成分をとる正射影」による $W$ の像が $\boldsymbol{K}^d$ 全体にならないときがマズイ．$n=3$, $d=2$ なら $W$ が「$xy$ 平面」に直交する場合である)．

したがって部分空間 $W \subset \boldsymbol{K}^n$ を指定するには，$n(n-d)$ 個の数($\in \boldsymbol{K}$)が必要である．これは部分空間全体を $(n-d)d$ 次元の空間と考えるべきことを示している[3]．(円や球面のように)曲っているこの空間は，(係数に応じて，実または複素)**グラスマン多様体**とよばれる．

---

## 道案内

1)　基底というだけなら，ベクトルの長さは単に0でなければよく，お互いの直交性も問題とはしない．そもそも多成分のベクトルの長さや角度をどう考えるかは問題にもより，長さなど意味をなさないこともあるだろう．(たとえば行列の成分をならべて1つのベクトルとみたとき，その「長さ」とは何か?)　このように考えると，内積や角度や長さを考えることは和とスカラー倍のみより「高級」なことに気付く．そこで内積を仮定しない「ベクトル空間論」と，「内積つきベクトル空間」とに分けて論ずることになる：第3部参照．

内積つきベクトル空間としては，(適当な条件を課した)関数の全体のなすベクトル空間に(やはり適当な)積分により内積を定義した場合が重要である．そこでは任意の関数が正規直交基底(直交関数系)による展開で表されることになり，微分方程式などに応用される(15章，練習問題15-5参照)．例5の「有限フーリエ変換」の名も，元来は熱方程式を解くためフーリエが考えた関数の表示 $f(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\theta}$ (フーリエ展開)の離散版 $\left(\theta = \dfrac{2\pi k}{n},\ k = 1, 2, \cdots\right.$ に制限する)であることによる．

2)　岩澤健吉(1917-1998)．より一般に示された本来の定理については，佐武一郎「岩澤先生と位相群論」(『数学のたのしみ』15号，日本評論社(1999))「岩澤数学の全貌：その豊穣の世界」pp. 9-21)とくにその5章を参照．

3)　線型代数で扱えるのは「平らな」ものだが，曲った対象でも接線，接平面，… は平らだと期待すれば，その次元を対象物の次元と定義できる．(尖った部分があると難しい．)　グラスマン多様体の場合，曲ってはいるが尖ったところはない．ただし，実数係数だと(メビウスの輪のように)表裏(向き)をもたない，異常な空間の例を提供する．

# 練習問題

**10-1**　一般に $\boldsymbol{R}^n$ の $n-1$ 次元部分空間 $H$ の平行移動として得られるアフィン部分空間 $H+\boldsymbol{v}$ を**超平面**(hyperplane)とよぶ．

（i）　$\mathbf{0}$ を含む超平面 $H$ は，ある $\boldsymbol{a}=[a_1,\cdots,a_n]\neq\mathbf{0}$（行ベクトル）により

$$H=\{\boldsymbol{x}={}^t[x_1,\cdots,x_n]\in\boldsymbol{R}^n \mid \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}=0\}\ (=\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{a}),$$

つまり $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$（$H$ の**定義方程式**という）で表せることを示せ．

（ii）　$\boldsymbol{R}^4$ の元 $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}0\\2\\0\\1\end{bmatrix}$ が1次独立であることを示し，超平面 $H=\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}_3$ の定義方程式を求めよ．

**10-2**　$U, V, W$ を $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間とする．

（i）　$(U+V)+W=U+(V+W)$（$=U+V+W$ と書ける）を示せ．

（ii）　$(U+V)\cap W=(U\cap W)+(V\cap W)$ が成り立たない例をあげよ．

**10-3**　通常の内積の下で，次のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots$ を順に正規直交化せよ．

（i）　$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$　　（ii）　$\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}$

（iii）　$\begin{bmatrix}1\\i\\1+i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1+i\\0\\i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1-i\\2+i\end{bmatrix}$　（(iii)は $\boldsymbol{C}^3$ のエルミート内積の下で考えよ．）

**10-4**　（i）　通常の内積の下で，$\boldsymbol{R}^n$ の部分空間 $W=\{\boldsymbol{x}={}^t[x_1,\cdots,x_n] \mid x_1+\cdots+x_n=0\}$ と $W$ の直交補空間 $W^\perp$ を考える．$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ の $W$ 成分，$W^\perp$ 成分を求めよ．

（ii）　$W$ の正規直交基底を，$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3, \cdots, \boldsymbol{v}_{n-1}=\boldsymbol{e}_{n-1}-\boldsymbol{e}_n$ を順に正規直交化して求めよ．

**10-5**　（i）　$\boldsymbol{R}^n$ に通常の内積を考え，$V, W$ はその部分空間とする．以下を示せ．

$$(V+W)^\perp=V^\perp\cap W^\perp,\qquad (V\cap W)^\perp=V^\perp+W^\perp.$$

（ii）　$V$ は(i)と同様とし，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ に対しその $V$ への直交射影 $\boldsymbol{x}_V\in V$ を対応させる写像を $p_V$ とする：

$$p_V:\boldsymbol{R}^n\longrightarrow V\subset\boldsymbol{R}^n,\qquad p_V(\boldsymbol{x}):=\boldsymbol{x}_V.$$

$p_V$ が線型かつベキ等であることを示せ．すなわち

$$p_V(k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{y})=kp_V(\boldsymbol{x})+lp_V(\boldsymbol{y}),\qquad p_V^2=p_V.$$

# 11章：n次の行列式

8章では連立1次方程式をはき出し法で解いたが，未知数の数と条件の数が等しいとき(係数行列が正方形のとき)は，解の公式(逆行列の公式)もあるだろう．行列式はこの問題を通じて発見されたといわれる[1)]．3次の行列式(7章)を再論しつつ $n$ 次の行列式を考えよう．思い出すと

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} := a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \tag{1}$$

であった．はじめの3項の添字は$(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)$と「ぐるぐる回した」順列をなし，これらは3つの数字の**巡回置換**ともよばれる．これらのうしろ2文字を入れ換えたのがマイナスつきの残り3項をなす．計6項は，$1,2,3$ の順列すべてについての和になっている．

## 11.1 3元連立1次方程式を強引に解くと

2次の行列式は「逆行列の分母」であり，連立方程式の解に分母として現れた(2章)．すなわち

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$(|A| \neq 0)$とすれば，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ の解 $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{y}$ は次のように表せる．

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} y_1 & b \\ y_2 & d \end{vmatrix}, \qquad x_2 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a & y_1 \\ c & y_2 \end{vmatrix} \tag{2}$$

未知数を $x_1, x_2, x_3$ に増やし，次の方程式を解こう．

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

以下，$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$，$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ と書く．拡大係数行列 $[A \mid \boldsymbol{y}]$ を考え，第3行の $-c_1/c_3$ 倍，$-c_2/c_3$ 倍を第1,2行に加えれば

$$\begin{cases} \left(a_1-\dfrac{c_1}{c_3}a_3\right)x_1+\left(b_1-\dfrac{c_1}{c_3}b_3\right)x_2 = y_1-\dfrac{c_1}{c_3}y_3 \\ \left(a_2-\dfrac{c_2}{c_3}a_3\right)x_1+\left(b_2-\dfrac{c_2}{c_3}b_3\right)x_2 = y_2-\dfrac{c_2}{c_3}y_3 \\ a_3x_1+b_3x_2+c_3x_3 = y_3 \end{cases} \tag{4}$$

となる．はき出し法を続けてもよいが，第 1, 2 式に(2)を適用すれば

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} y_1-(c_1/c_3)y_3 & b_1-(c_1/c_3)b_3 \\ y_2-(c_2/c_3)y_3 & b_2-(c_2/c_3)b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1-(c_1/c_3)a_3 & b_1-(c_1/c_3)b_3 \\ a_2-(c_2/c_3)a_3 & b_2-(c_2/c_3)b_3 \end{vmatrix}} \tag{5}$$

を得る(分母 $\neq 0$ と仮定しよう)．この分母分子は平行 6 面体の体積の計算でも出てきた形で(§ 7.3)，まず分母を計算すれば

$$\begin{aligned} &c_3^{-2}\begin{vmatrix} c_3a_1-c_1a_3 & c_3b_1-c_1b_3 \\ c_3a_2-c_2a_3 & c_3b_2-c_2b_3 \end{vmatrix} \\ &= c_3^{-1}(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1) \\ &= c_3^{-1}|\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}|. \end{aligned}$$

(5)の分子は，分母の $a_i$ を $y_i$ にしたものだから

$$x_1=\frac{|\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}|}{|\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}|} \tag{6}$$

と行列式の比になり，ベクトル積を用いて導いた式(§ 7.5)が再び得られた．文字の役割を入れ換えれば $x_2, x_3$ も得られる(もちろん，(6)を(4)に代入し求めてもよい)．$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}x_1+\boldsymbol{b}x_2+\boldsymbol{c}x_3$ なので，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を入れ換えれば $x_2$ に，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ を入れ換えれば $x_3$ になる．このとき

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}| &= b_1a_2c_3+b_2a_3c_1+b_3a_1c_2-b_1a_3c_2-b_2a_1c_3-b_3a_2c_1 \\ &= -(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1) \\ &= -|\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}| \end{aligned} \tag{7}$$

同様に $|\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}|=-|\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}|$ であり，これらの符号を分子におしつければ分母は共通にできる．

$$\begin{aligned} \therefore\quad x_2 &= \frac{|\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}|}{|\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}|} = -\frac{|\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}|}{|\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}|} = \frac{|\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{c}|}{|A|} \\ x_3 &= \frac{|\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}|} = -\frac{|\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}|} = \frac{|\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{y}|}{|A|} \end{aligned} \tag{8}$$

分子を $\boldsymbol{y}$ できまる量とみるため

$$|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| = +a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \tag{9}$$

$$= -b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \tag{10}$$

$$= +c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{11}$$

と書いておく：(9)は(1)を $a_i$ の1次式とみた式で，同様に $b_i$ ないし $c_i$ についてまとめ直せば(10)，(11)を得る．(6)，(8)の分子はこれらで順に $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$ としたものだから，結局 $\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, x_2, x_3]$ は

$$\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}y_1 - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}y_2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}y_3 \\ -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}y_1 + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}y_2 - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}y_3 \\ +\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}y_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}y_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}y_3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

と表せる．$|A| \neq 0$ ならこれが任意の $\boldsymbol{y}$ に対し(3)の解を与えるから，

**定理18** 3次正方行列 $A = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ は $|A| \neq 0$ なら逆行列をもち，このとき $A^{-1}$ は次式の $\dfrac{1}{|A|}$ 倍である．

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \tag{13}$$

□

**注意** (4)，(5)の計算には $a_1 \neq 0$ や途中の2次の行列式 $\neq 0$ の仮定が要るが，(12)が解であることは直接確かめられる．よって $|A| \neq 0$ なら逆行列がある．逆に，$|A| = 0$ のとき $A^{-1}$ が存在しないことを次章で示す．

(13)を3次行列 $A$ の**余因子行列**とよぶ．古人の努力を偲（しの）ぶべきだが，逆行列をこの「公式」で求めるのは計算量が多くあまり勧められない．むしろ(9)，(10)，(11)が計算上大事で，$|A|$ の(第1, 2, 3)列に関する**余因子展**

開という．たとえば(10)の $b_i$ の係数(**余因子**)は，$A$ から第2列 $\boldsymbol{b}$ と第 $i$ 行を除いた2次の行列式で，ほかも同様であることに注意しよう．

---

余因子(cofactor)とは，因子(factor)の相棒の意．(1)における $a_1$ の係数を(1, 1)余因子，$c_2$ の係数を(2, 3)余因子などとよぶと，「$(i, j)$余因子は $A$ の第 $i$ 行と第 $j$ 列を除いてできる小さい行列式に符号 $(-1)^{i-j}$ をつけたもの」(後出の(34))である．

---

**例1**　余因子展開は成分に0があるとき便利である：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(9)}{=} 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0-5\cdot(-4)+2\cdot(-10) = 0, \tag{14}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(11)}{=} 0\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0+1\cdot(-2)+2\cdot 3 = 4. \tag{15}$$

**問**　余因子展開を用いて次の行列式を求めよ．

(i) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$　　(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$　　(iii) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

## 11.2　3次行列式の性質

計算にも役立つ性質をまとめておこう．

**1. 列に関する線型性**　行列式(1)は $a_1, a_2, a_3$ について1次式だから

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| \tag{16}$$

$$|k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| = k|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| \tag{17}$$

が成り立つ．$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ についてもまったく同様である．

**2. 交代性**　3次行列式は2つの列を入れ換えると$(-1)$倍となる．

$$|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}|$$

$$= -|\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}| = -|\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}| = -|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}| \tag{18}$$

これは(7)と同様に確かめられるし，すでに用いた $|\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}| = -|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}|$ から残りはしたがう．(一般に，入れ換えで不変であることを「対称(的)」，入れ換えで符号が変わることを「交代(的)」という．)

とくに $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ なら，$|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}| = -|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}|$ より $|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}| = 0$．したがって $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が1次従属のときも($\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ または $\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$ より)$|A| = 0$．これは $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ あるいは $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}$ でも同様である．すなわち

$$2\text{つの列が等しければ，} |A| = 0 \tag{19}$$

したがって

$$2\text{つの列が1次従属なら，} |A| = 0. \tag{19$'$}$$

---

**注意** (18)は線型性(1)の下で交代性と同値である：たとえば $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| = 0$ の左辺に線型性を使えば

$$|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| = 0$$

であるが，第1項と第4項は0． ∴ $|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}| = 0$．

なお，(19)は行列式を平行6面体の体積と見ると当たり前である(7章)．体積そのものは0以上なので，符号がかわる線型性や交代性はもちえないが，(19)をみたし，線型である，と要請すると自動的に交代性が出てくるわけである．

---

線型性と交代性より，行列式はある列に他の列の何倍かを加える基本変形で不変である：たとえば

$$|\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| + k|\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|. \tag{20}$$

**3. 規格化**(normalization) 定義よりただちに

$$|\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{21}$$

これらはそのまま計算にも役立ち，決して抽象的なものではない．なお(1)または「サラスの方法」により，行列式は転置で不変だった(§7.3)：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{22}$$

したがって，列で成り立つ線型性・交代性が行でも成り立つ．とくに(20)を転置すれば，ある行を他の行に加える変形で行列式は変わらない．これ

らの変形で 0 を増やして余因子展開を使うのが計算のコツである．

**例 2**　(20) を (14) 式の例に使ってみると：

$$\overset{\quad\quad\quad -1/4}{\begin{vmatrix} 0 & \boxed{1} & \boxed{4} \\ 5 & \boxed{3} & \boxed{2} \\ 2 & \boxed{1} & \boxed{0} \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 5/2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \left( \overset{(11)}{=} 4 \begin{vmatrix} 5 & 5/2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = 0.$$

第 2 列に第 3 列の $-\dfrac{1}{4}$ 倍を加え 0 を作ったところ第 1 列と新しい第 2 列が比例し，交代性（または (11)）から 0 となった．　□

**例 3**　行についての交代性を使ってみると

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

まず第 2 行と第 3 行を，次に第 1 行と第 2 行を入れ換えた．　□

性質 1-3 は「行列式の計算の規則」といえ，実際 3 次の行列式を決定してしまう．

**定理 19**　3 つの 3 成分ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対してきまる式 $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ が線型性 (17)・交代性 (18)・規格化 (21) の 3 条件をみたせば，$D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|$.

**証明**　線型性より，$D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ は

$$\begin{aligned} & D(a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \\ &= a_1 D(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + a_2 D(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) + a_3 D(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \\ &= \sum_{i=1,2,3} a_i D(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \end{aligned}$$

と展開できる．$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ についても同様にすれば

$$D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \sum_{i,j,k=1,2,3} a_i b_j c_k D(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k). \tag{23}$$

あとは $D(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$ がきまればよい．交代性より $i, j, k$ に重複があれば $D(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) = 0$ である．よって (23) で残るのは 1, 2, 3

の順列に対する項だけで，$D(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)$ を $D_{ijk}$ と書けば

$$\begin{aligned}(23) = {} & a_1b_2c_3D_{123}+a_1b_3c_2D_{132}+a_2b_1c_3D_{213}\\ & +a_2b_3c_1D_{231}+a_3b_1c_2D_{312}+a_3b_2c_1D_{321}.\end{aligned}$$

さらに交代性より，$D_{132}=D_{213}=D_{321}=-D_{123}$，$D_{123}=D_{231}=D_{312}$ (図1ア)のように，入れ換えるごとに$(-1)$倍となる).

$$\begin{aligned}\therefore\quad D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = {} & (a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3\\ & +a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1)\cdot D_{123}\end{aligned}$$

これは規格化 $D_{123}=1$ より $|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|$ に等しい. □

**問**　次の各段階では(16)-(22)のどの性質を用いているか.

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & -1 & 1\\ 5 & 1 & 4\end{vmatrix} \overset{ア}{=} \begin{vmatrix}10 & 3 & 5\\ 0 & -1 & 0\\ 8 & 1 & 5\end{vmatrix} \overset{イ}{=} 2\cdot5\begin{vmatrix}5 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix} \overset{ウ}{=} 10\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}$$
$$= -10.$$

## 11.3　n 次行列式の定義

$n$ 次行列の行列式を，次のように定義しよう.

**定義 15**　$n$ 次の正方行列 $A=[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n]$ に対し，次の3条件をみたすただ1つの式を $n$ 次行列式とよび，$\det A$, $|A|$, $|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n|$ などと書く.

**1. 線型性**　$|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n|$ は，各列について線型である.

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{a}_1, \cdots, c\boldsymbol{a}_k+c'\boldsymbol{a}'_k, \cdots, \boldsymbol{a}_n|\\ &\quad = c|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k, \cdots, \boldsymbol{a}_n|+c'|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_k, \cdots, \boldsymbol{a}_n| \qquad (24)\end{aligned}$$

**2. 交代性**　第 $i$ 列と第 $j$ 列$(i\neq j)$を入れかえ，他はそのままとすると，値が符号だけ変わる：

$$|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_n| = -|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n|. \qquad (25)$$

(19)と同様にいいかえれば，「異なる2つの列が従属$(\boldsymbol{a}_i=k\boldsymbol{a}_j)$ならば，$|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n|=0$」である[2)].

**3. 規格化**　単位行列 $E=[\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n]$ に対しては

$$|E|=1. \qquad (26)$$

具体形のない定義はわかりにくいだろうか？　しかし3次のときと同様，これらの条件があれば計算は進む：

**例 4**
$$\begin{vmatrix} 2 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(24)}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$\overset{(24,\,25)}{=} 0 + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= |2E| \overset{(24)}{=} 2^4|E| \overset{(26)}{=} 16.$$
□

そして驚くことに，連立方程式も解けてしまう：

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \qquad (A = [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n] \text{は } n \text{ 次行列,} \ \ \boldsymbol{x} = {}^t[x_1, \cdots, x_n])$$
$$\text{すなわち} \quad x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{y} \tag{27}$$

を解こう．これが成り立てば，もちろん

$$|x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n| = |\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n|.$$

左辺に線型性を使えば

$$x_1|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n| + x_2|\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n| + \cdots + x_n|\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n|,$$

第1項は $x_1|A|$ に等しく，他は交代性より0．よって

$$x_1|A| = |\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n|$$

である！　$x_i$ も同様にとりだせて，$i$ 番目に $\boldsymbol{y}$ を入れれば

$$x_i|A| = |\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{y}, \cdots, \boldsymbol{a}_n|$$
$$\therefore \quad x_i = \frac{|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{y}, \cdots, \boldsymbol{a}_n|}{|A|} \qquad (|A| \neq 0 \text{ のとき}) \tag{28}$$

これを**クラメルの公式**という．

---

以上は7章で外積を用いて導いたときと同じこと．（それができるよう行列式を定義したといってもよい．）　また，正規直交基底で一般のベクトルを表すときの係数を内積でとりだすことにも似ている．

---

これより逆行列の公式も得られるが，まずは(24)，(25)，(26)をみたすも

のがあることを確かめよう．方針は3次のときと同様である．

$\boldsymbol{a}_j = {}^t[a_{1j}, \cdots, a_{nj}] = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_i$ とすると，まず線型性より

$$|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n| = \sum_{\sigma_1=1}^{n} a_{\sigma_1,1}|\boldsymbol{e}_{\sigma_1}, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n| \qquad (\overset{シグマ}{\sigma} \text{はギリシャ文字})$$

$$= \cdots = \sum_{\sigma_1,\cdots,\sigma_n=1}^{n} a_{\sigma_1,1}\cdots a_{\sigma_n,n}|\boldsymbol{e}_{\sigma_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{\sigma_n}|. \qquad (29)$$

交代性より $|\boldsymbol{e}_{\sigma_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{\sigma_n}|$ は $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ に重複があれば0．そうでない $1, \cdots, n$ の順列のときは $1, \cdots, n$ に並べかえれば $\pm 1$ のどちらか．たとえば

$$|\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2| \overset{①}{=} -|\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2| \overset{②}{=} +|\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3| = +1. \qquad (\text{図1(ア)参照})$$

1回入れかえるたびに正負が変わる．その結果，順列 $\sigma$ ごとに $\pm 1$ のどちらかが得られる．これを $\sigma$ の**符号**(signature)とよび，$\mathrm{sgn}\,\sigma$ と書こう．

一般の $\sigma$ に対しても，図1のように描くときの交点数が偶数か奇数かで，$\mathrm{sgn}\,\sigma$ の正負がきまる．

---

ただし正確を期すと，符号がたしかに図で決定できるか(符号が well-defined か)は吟味の必要があり，どのように図を描いても(1度に2本よりたくさんは交差しないとして)交差点の数の偶奇は一定であることを示さなくてはならない．

この問題は，たとえば符号を $\mathrm{sgn}\,\sigma := \prod_{i<j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = \pm 1$ ($\prod_{i<j}$ は，$i<j$ をみたす $\frac{n(n-1)}{2}$ 個の組 $(i, j)$ についての積を表す)と定めれば(分母子は定まった数なので)避けられる．その場合この符号が上のように図で得られることを確認する必要がある．これについては付録2を参照．

---

**例5**　$\sigma_1 = n, \sigma_2 = n-1, \cdots, \sigma_j = n-j+1, \cdots, \sigma_n = 1$ のとき，図1(イ)の交点は $\frac{n(n-1)}{2}$ 個で，$\mathrm{sgn}\,\sigma = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. □

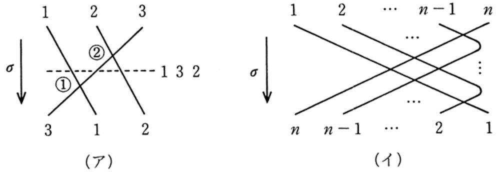



**図1**　符号 sgn $\sigma$ のきまり方．交代性(25)により，一度入れ換えるごとに $-1$ 倍となる．

以上により

**定理 20** $n$ 次正方行列 $A=[a_{ij}]$ に対し，定義 15 の線型性・交代性・正規化の 3 条件を満たす式(文字 $a_{ij}$ の多項式)はただ 1 つ存在し

$$\det A=\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}\sigma\; a_{\sigma_1,1}\cdot a_{\sigma_2,2}\cdots a_{\sigma_n,n}. \tag{30}$$

ここで和はすべての順列(置換) $\sigma$ を動き，$n!$ 項ある． □

集合 $\{1,\cdots,n\}$ から集合 $\{1,\cdots,n\}$ への 1 対 1 写像を $n$ 文字の**置換**という．$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ が文字 $1,\cdots,n$ の順列なら，1 を $\sigma_1$ に，2 を $\sigma_2$ に，…，$n$ を $\sigma_n$ にうつすというルールで置換 $\sigma$ ができる：$\sigma(j)=\sigma_j$. これにより置換と順列は同じものとみなせる．この置換を

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n\end{pmatrix}$$

と表す．ここで上の段は順序が違っていてもよい．たとえばすべての $i$ に対し $\sigma(i)$ を $i$ にうつす $\sigma$ の逆写像は，この書き方によれば

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}.$$

---

**注** $n$ 次行列式は項の数が $n!$ (階乗)個あるので，$n\geqq 4$ では「サラスの方法」的には計算できない：タスキガケに描けるのは $2n$ 項しかなく，$n!$ にはとても足りない．これゆえにいろいろな「使える」性質を調べることにもなる．

定理について正確を期せば，(30)はたしかに 3 条件をみたすか？を示すべき．2 つの置換 $\sigma,\tau$(タウ) の写像としての合成を $\sigma\circ\tau$ と書く：$\sigma\circ\tau(j)=\sigma(\tau(j))$．すると一般に $\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau)=\operatorname{sgn}\sigma\cdot\operatorname{sgn}\tau$ が成り立ち，これにより証明が完結する(付録 2)．

---

**定理の系(転置不変性)** $|A|=|{}^tA|$.

ゆえに**列について成り立つことはすべて，行でも成り立つ**．たとえば $\det A$ は行についても線型性，交代性をもち，2 つの行が等しければ 0.

**系の証明** ${}^tA$ の $(i,j)$ 成分は $a_{j,i}$ だから，

$$|{}^tA|=\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}(\sigma)\,a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{n,\sigma(n)}. \tag{31}$$

この各項を $a_{\tau(1),1}\cdots a_{\tau(n),n}$ のように，列の添字の順にしたい．それには $\sigma$

の逆写像 $\sigma^{-1}$ を使えば，$\sigma(i)=j$ は $i=\sigma^{-1}(j)$ と逆に解けて，$a_{i,\sigma(i)}=a_{\sigma^{-1}(j),j}$ と書ける(つまり $\tau=\sigma^{-1}$ でよい)．$\sigma$ がすべての順列を動けば $\tau=\sigma^{-1}$ もすべての順列を動き，また

$$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})=\mathrm{sgn}(\sigma)$$

である：絵で描けば交点数(の偶奇)が等しい(図2)．したがって(31)の和を $\sigma^{-1}=\tau$ で変数変換すれば

$$|{}^tA|=\sum_{\tau}\mathrm{sgn}(\tau)\,a_{\tau(1),1}\cdots a_{\tau(n),n}=|A|. \qquad \square$$

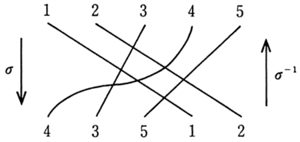



図2 $\sigma$ の逆 $\sigma^{-1}$ とその符号

**問** (i) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$, $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&2&1&4\end{pmatrix}$ の符号を求めよ．

(ii) 次の行列式を求めよ．$|A|=\begin{vmatrix}0&a&0&0\\d&0&b&0\\0&e&0&c\\0&0&f&0\end{vmatrix}$

## 11.4 余因子展開と逆行列の公式

$A=[a_{ij}]$ の第 $n$ 列が，右下 $a_{n,n}$ 以外 0 のときを考える．すると(30)の $\sigma(n)=n$ の項以外は 0 で

$$\begin{vmatrix}a_{1,1}&\cdots&a_{1,n-1}&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n-1,1}&&a_{n-1,n-1}&0\\a_{n,1}&&a_{n,n-1}&a_{n,n}\end{vmatrix}=\sum_{\sigma}\mathrm{sgn}\,\sigma\;a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n-1),n-1}\cdot a_{n,n}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{1,1}&\cdots&a_{1,n-1}\\\vdots&&\vdots\\a_{n-1,1}&&a_{n-1,n-1}\end{vmatrix}a_{n,n}. \qquad (32)$$

**例 6**　とくに下三角行列の行列式は対角成分の積であり，転置不変性により上三角の場合も同じである．

$$\begin{vmatrix} a_1 & & & O \\ & \ddots & & \\ & & a_{n-1} & \\ * & & & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & & O \\ & \ddots & \\ * & & a_{n-1} \end{vmatrix} a_n = \begin{vmatrix} a_1 & & O \\ & \ddots & \\ * & & a_{n-2} \end{vmatrix} a_{n-1}a_n$$

$$= \cdots = a_1 \cdots a_{n-1}a_n. \qquad \square$$

一般に，第 $j$ 列が基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ のとき

$$|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \overset{\curvearrowright}{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{a}_{j+1}}, \cdots, \boldsymbol{a}_n| \tag{33}$$

$$= (-1)|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \overset{\curvearrowright}{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{a}_{j+2}}, \overset{\cdots}{\cdots}, \boldsymbol{a}_n|$$

$$= (-1)^{n-j}|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{e}_n| \qquad \text{（第 } j \text{ 列を後ろに）}$$

$$= (-1)^{n-j}\cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & & a_{i-1,n} & 0 \\ \boxed{a_{i,1}} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} & 1 \\ a_{i+1,1} & & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & & a_{i+1,n} & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & & a_{n,n} & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{（第 } i \text{ 行を下に）}$$

$$= (-1)^{n-j}(-1)^{n-i}\cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & & a_{i-1,n} & 0 \\ a_{i+1,1} & & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & & a_{i+1,n} & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & & a_{n,n} & 0 \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j}\cdot \Delta_{i,j} (=: \hat{a}_{ij}) \tag{34}$$

ただし $\Delta_{i,j}$ は，$|A|$ の第 $i$ 行と第 $j$ 列を除いた $(n-1)$ 次の行列式

$$\Delta_{i,j} := \left|\begin{array}{cccc:cccc} a_{1,1} & & a_{1,j-1} & & a_{1,j+1} & & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & & a_{i-1,j-1} & & a_{i-1,j+1} & & a_{i-1,n} \\ \hdashline a_{i+1,1} & & a_{i+1,j-1} & & a_{i+1,j+1} & & a_{i+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & & a_{n,j-1} & & a_{n,j+1} & & a_{n,n} \end{array}\right|$$

である．これに符号 $(-1)^{i+j}$ をつけた(34)(＝(33))を $A$ の $(i,j)$-**余因子**とよび，$\widehat{a}_{i,j}$ と書く．そして $\widehat{a}_{j,i}$ を $(i,j)$成分とする行列

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} \widehat{a}_{11} & & \widehat{a}_{n1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \widehat{a}_{1n} & & \widehat{a}_{nn} \end{bmatrix} \qquad (\text{添字に注意}) \tag{35}$$

を**余因子行列**とよぶ．もともと第 $j$ 列に 0 が多くなくても

$$\boldsymbol{a}_j = a_{1,j}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{n,j}\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\boldsymbol{e}_i$$

と和にわければ，行列式も和になるから

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \overset{j}{\breve{\boldsymbol{e}}_i}, \cdots, \boldsymbol{a}_n| \qquad (\boldsymbol{e}_i \text{ は } j \text{ 番目})$$

$$\overset{(33)}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\widehat{a}_{i,j} = a_{1,j}\widehat{a}_{1,j} + \cdots + a_{n,j}\widehat{a}_{n,j}. \tag{36}$$

つまり，$\widehat{a}_{i,j}$ は(§11.1 の注の意味で)たしかに $a_{ij}$ の余因子である．(36)を第 $j$ 列に関する**余因子展開**という．

第 $i$ 行についての線型性より，$|A|$ は $a_{i,1}, \cdots, a_{i,n}$ の 1 次式でもあるが，$|A|$ における $a_{i,j}$ の係数は上の $\widehat{a}_{i,j}$(34)だから

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\widehat{a}_{i,j} = a_{i,1}\widehat{a}_{i,1} + \cdots + a_{i,n}\widehat{a}_{i,n} \tag{37}$$

も成り立つ(第 $i$ 行に関する余因子展開)．これは(33)-(36)の計算を ${}^tA$ について行ってもわかる．

**例 7** $\left|\begin{array}{|c|ccc} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right|$ (第 1 列で展開する)

$$
= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}
$$

$$
= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}
$$

$$
\overset{(15)}{=} 2\cdot 4 + (-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8-3 = 5. \qquad \square
$$

最後に逆行列について．$j=1,\cdots,n$ に対し方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_j$ が解 $\boldsymbol{x}_j$ をもてば，$A^{-1}=[\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n]$ であった(§8.2)．クラメルの公式(28)より，$\boldsymbol{x}_j$ の第 $i$ 成分(＝$A^{-1}$ の $(i,j)$ 成分)は

$$
\frac{|\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{i-1},\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{a}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{a}_n|}{|A|}. \tag{38}
$$

(33)と比較すれば，分子は $(j,i)$-余因子 $\hat{a}_{j,i}$ である．

$$
\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\hat{A} \qquad (|A| \neq 0 \text{ のとき}) \tag{39}
$$

これも**クラメルの公式**とよばれる．

---

(36)と同様に考えると，$j \neq k$ のとき

$$
\sum_{i=1}^{n} \hat{a}_{i,j}a_{i,k} = \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{j-1},\overset{(j\text{番目})}{a_{i,k}\boldsymbol{e}_i},\boldsymbol{a}_{j+1},\cdots,\boldsymbol{a}_n|
$$

$$
= |\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{j-1},\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}_{j+1},\cdots,\boldsymbol{a}_n| = 0 \tag{40}
$$

であり，これと(36)をあわせると $\hat{A}A=|A|E$．同様に $\sum_{i=1}^{n} a_{j,i}\hat{a}_{k,i}=0$ であり，(37)とあわせ $A\hat{A}=|A|E$．これからも(39)がわかる．

(39)は公式としては計算量が多く実際的でないが($n^2$ 個の行列式を計算しないといけない！)，解を exact な式として見せてくれる点で重要である．

---

**問**　余因子行列 $\hat{A}$ を求め，$\frac{1}{|A|}\hat{A}$ が逆行列 $A^{-1}$ となることを確かめよ．

(i)　$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$　　(ii)　$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

性質(24), (25), (26)は行列式のみたすべき性質を述べたものである．このように「もつべき性質(公理，axiom)を列挙してその概念を(再)構成・検討する」戦略(考え方)は**公理化**といわれ，しばしば有効である．(この意味で数学でははじめの定義にすべてがかかっており，さまざまな経験が凝縮されていることが多い．) 行列式が体積を表すことも公理に基づいて理解でき，1次独立性との関係も理解しやすい…が，この章はここまで．

## 道案内

1) 行列式はライプニッツ(1646-1716)が発見した後に忘れられ，クラメル(1704-1752)などが再発見し今日に至ったそうである．ライプニッツと同時代に関孝和(1642？-1708)も行列式を見つけており，当時はむしろ日本の方が進んだ面もあった，…についても御存知の方が多いかもしれない．歴史上，行列式は行列そのものより先に現れたとも言える．(ただし「連立1次方程式の係数をならべたもの」としては古代の中国にも現れている．そもそも「方程」が「四角に並べる」の意！)

行列式の歴史をまとめた本としては，(やや専門的になるが)次が詳しい．

T. Muir, "*The Theory of Determinants——in the historical order of development*" MacMillan and co., London 1906.

2) 行列式の性質「2つの列が一致すると0」は，次章で

「$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が1次従属 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n| = 0$」

へと拡張される(§12.1)．

## 練習問題

**11-1** 行列式を求め，行列式が 0 のときは階数を調べよ（(vi)は $n$ 次）.

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix}$　(ii) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$　(iii) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -9 & -3 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$　(v) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$　(vi) $\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$

**11-2** 次の行列式を求めよ．また一般に $n$ 次とした場合を考えよ．

$$a_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad a_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad a_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

**11-3** $A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ d & 0 & b & 0 \\ 0 & e & 0 & c \\ 0 & 0 & f & 0 \end{bmatrix}$ とする（問 § 11.3）.

(i) $A$ の余因子行列を求めよ．

(ii) クラメルの公式を用い，方程式 $A\boldsymbol{x} = {}^t[1, 1, 1, 1]$ を解け．

**11-4** (i) 4 次の行列式のすべての項を書き下せ．

(ii)* $n$ 文字の置換のうち，符号が正のものと負のものは同数あることを示せ．
[ヒント：付録 2 の性質 $\mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sgn}\,\sigma\,\mathrm{sgn}\,\tau$ を用いよ.]

**11-5** $X = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}$ は $m+n$ 次の正方行列で，$A$ は $m$ 次正方，$D$ は $n$ 次正方であるとする．このとき $|X| = |A||D|$ を示せ．

# 12章：行列式の応用

行列式はいろんな場面で使われるが，その一端をうかがってみよう[1]．定義を思いだすと，$n$ 次の行列式 $|A| = |\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n| = \det A$ は

1）　各列 $\boldsymbol{a}_j$ について線型，

2）　列の入れ替えについて交代的，

3）　単位行列 $E$ に対し $|E| = 1$ という規格化，

という3条件で定まるのだった(定義15)．

## 12.1　乗法性とその帰結

復習をかねて，2次行列式で知っていた乗法性(§2.5)からはじめよう：$A$ と $B$ を $n$ 次正方行列とする．

**定理 21**　(**乗法性**)　$\det AB = \det A \cdot \det B$.

**証明**　$\det AB = |AB|$ を $B = [\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n]$ の関数とみると，$|AB| = |A\boldsymbol{b}_1, \cdots, A\boldsymbol{b}_n|$ は $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ について線型性，交代性をみたす：たとえば

$$
\begin{aligned}
&|A(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_1'), A\boldsymbol{b}_2, \cdots, A\boldsymbol{b}_n| \\
&\quad = |A\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_2, \cdots, A\boldsymbol{b}_n| + |A\boldsymbol{b}_1', A\boldsymbol{b}_2, \cdots, A\boldsymbol{b}_n|.
\end{aligned}
$$

よって定理18, 19と同様にして $|AB| = c|\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n|$．規格化の定数 $c$ は $B = E$ のときの値で，$c = |AE| = |A|$．∴　$|AB| = |A||B|$．　□

定理より $A$ が可逆なら，$AA^{-1} = E$ より $|A||A^{-1}| = 1$．すなわち

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}. \tag{1}$$

$|A| = 0$ ならば $|A||A^{-1}| = 1$ にできないから，逆行列はない．$|A| \neq 0$ ならクラメルの公式で逆行列が与えられたから，次の(2)の同値がいえた．

**定理 22**　$n$ 次行列 $A$ に対し，以下は同値である．

$$|A| \neq 0 \Longleftrightarrow A \text{ は可逆} \tag{2}$$

$$\Longleftrightarrow \operatorname{rank} A = n \tag{3}$$

$$\left(\overset{\text{次元定理}}{\Longleftrightarrow} \operatorname{Ker} A = \{\boldsymbol{0}\}\right) \tag{4}$$

(2)⇔(3)の**証明**　$A$ の階数標準形(8章定理11)を考える：

$$PAQ = R = \begin{bmatrix} 1 & & & O \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ O & & & \end{bmatrix} \quad (\text{対角線に } 1 \text{ が } r \text{ 個}).$$

基本変形の行列 $P, Q$ は可逆だから，$|P|, |Q| \neq 0$．よって $|R| = |PAQ| = |P||A||Q|$ より

$$|A| \neq 0 \Longleftrightarrow |R| \neq 0 \Longleftrightarrow R = E \Longleftrightarrow \operatorname{rank} A = n. \qquad \square$$

---

**注意**　上の証明で $R = E$ のとき，$A^{-1} = QP$ である．$P, Q$ が三角行列にとれれば，これらの行列式は単に対角成分の積であり，$|A| = |P|^{-1}|Q|^{-1}$ も求まる：これも行列式を求める1つの方法である．

---

次元定理(§9.4)より(4)も同値だが，$\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$ とは

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0} \Longrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0$$

$(A = [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n])$ ということだった．つまり

**系**　$|A| \neq 0 \Longleftrightarrow A$ の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は1次独立　□

(したがって，$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は基底をなす)でもある．

$|A| = |{}^tA|$ だったから(§11.3の系)，さらに「$A$ の $n$ 個の行ベクトルが1次独立」などといっても同値である．さらに否定をとれば

$$\begin{aligned} |A| = 0 &\Longleftrightarrow A \text{ の列ベクトルは1次従属} \\ &\Longleftrightarrow A \text{ の行ベクトルは1次従属} \end{aligned}$$

でもある．これらの同値関係は頻繁に使われる．

**問**　$\omega = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$，$T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$，$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{bmatrix}$ とおく($\omega$ は1の原始3乗根である．また $C^{-1} = \dfrac{1}{3}C^*$ であった：§10.3)．

(i)　$C^{-1}TC$ が対角行列になることを示せ．

(ii)　(i)を用いて $a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ．

(iii)　(ii)を用いて，3次方程式の解の公式を作れ．

## 12.2　体積と行列式

2次，3次実行列の行列式が面積，体積を表すことはすでに知っている．一般の次元で考えるには，まず $n$ 次元の体積とは何か考えておく必要がある．行列式と同様に，みたすべき性質(公理)を挙げてみよう．

1次変換(6章)で直交性は崩れるから，「直方体」より一般の「平行体」を考えるのが自然である．

$\boldsymbol{R}^n$ において，与えられた $n$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ を辺にもつ次の図形を，$n$ 次元**平行体**と呼ぼう．

$$P(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i \in \boldsymbol{R}^n \;\middle|\; 0 \leqq c_i \leqq 1 \ (i = 1, \cdots, n) \right\} \quad (5)$$

$\boldsymbol{R}^n$ は長さが定義された $n$ 次元ユークリッド空間とすれば，$P(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ の「$n$ 次元体積」$\mathrm{vol}_n\, P(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ が(もし考えられれば)必要に応じて等積変形し「底面積×高さ」を用いてきまるだろう(図1)：

**平行体の体積がみたすべき性質**

**V0．辺の順序づけによらない**　すべての置換 $\sigma$ に対し

$$\mathrm{vol}_n\, P(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = \mathrm{vol}_n\, P(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \boldsymbol{v}_{\sigma(n)}).$$

**V1．等積変形**　すべての $c_1, \cdots, c_{n-1} \in \boldsymbol{R}$ に対して

$$\mathrm{vol}_n\, P(\boldsymbol{v}_1 + c_1\boldsymbol{v}_n, \cdots, \boldsymbol{v}_{n-1} + c_{n-1}\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_n) = \mathrm{vol}_n\, P(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n). \quad (6)$$

**V2．底面積×高さの原理**　$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ の第 $n$ 成分が0のとき，$h = |(\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{e}_n)|$ (内積の絶対値)とすれば

$$\mathrm{vol}_n\, P(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{n-1}, \boldsymbol{v}_n) = \mathrm{vol}_{n-1}\, P(\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_{n-1}) \cdot h.$$

ここで $\boldsymbol{v}'_j \in \boldsymbol{R}^{n-1}$ は，$\boldsymbol{v}_j$ の第 $n$ 成分の0を除いたものとする．

**V3．正規化**　$c \in \boldsymbol{R}^1$ に対し，$\mathrm{vol}_1(c) = |c|$.　□

いずれもモットモな要請だろう．V1とV2により次元が次々に小さい場合に帰着される(条件V0は「番号づけは人間の勝手」ということでもあるが，より積極的には，もとの $\boldsymbol{v}_n$ の第 $n$ 成分が0の場合にそうでない他のベクトルととりかえるのに必要である)．よって，ベクトルの組$(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$に対して定義される関数が同じ性質をもてば，それは体積 $\mathrm{vol}_n\, P$ と一

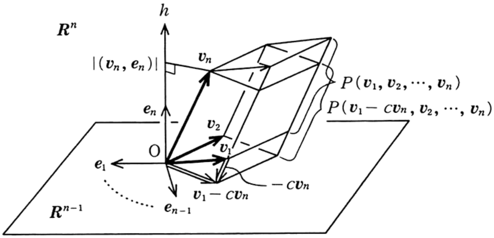



**図1** $n$ 次元平行体の等積変形(6)

致するはずである．

**定理 23** $n$ 次行列式 det の絶対値は V0-V3 を満たし，ゆえに平行体(5)の体積 $\mathrm{vol}_n\, P$ を与える：

$$\mathrm{vol}_n\, P(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = |\det[\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n]|.$$

とくに，$\mathrm{vol}_n\, P$ は矛盾なく定まる．

**証明** V0 は行列式の交代性の条件の絶対値をとれば明らか．

V1） V0 よりどの列も役割は同じで，$\boldsymbol{v}_1$ の変形について示せば十分．

$$\det[\boldsymbol{v}_1 + c_1\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$$
$$= \det[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n] + c_1 \det[\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$$

であるが，交代性より第 2 項は 0 である．

V2） 行列式のサイズを小さくする式(余因子展開)

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & & a_{1,n-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} a_{n,n} \qquad (7)$$

の絶対値をとれば，それが示すべき等式である．

V3） 1 次正方行列 $[c]$ の行列式は $c$ そのもの($\because \det[c] = c \det[1] = c \cdot 1$)．その絶対値は $|c|$ である．

これですべての条件が確認された．よって行列式 $\det[\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ の絶対値は，その列ベクトルが定める平行体 $P(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ の体積を与える． □

**例1**　平面 $\boldsymbol{R}^2$ の3点 A$(a_1, a_2)$, B$(b_1, b_2)$, C$(c_1, c_2)$ を頂点とする三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right| \tag{8}$$

と表せる．実際，(8)は次のように変形できる．

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} a_1-c_1 & b_1-c_1 & c_1 \\ a_2-c_2 & b_2-c_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} a_1-c_1 & b_1-c_1 \\ a_2-c_2 & b_2-c_2 \end{bmatrix}\right|$$

右辺はたしかに平行四辺形の面積の半分：これはCを原点に平行移動して考えた式である．(8)は図2左の三角柱 ABC-$\tilde{\mathrm{A}}\tilde{\mathrm{B}}\tilde{\mathrm{C}}$ の体積でもある．

同様に，4点 A$(a_1, a_2, a_3)$, B$(b_1, b_2, b_3)$, C$(c_1, c_2, c_3)$, D$(d_1, d_2, d_3)$ を頂点にもつ空間 $\boldsymbol{R}^3$ の四面体の体積は次で得られる：

$$\frac{1}{6}\left|\det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{bmatrix} a_1-d_1 & b_1-d_1 & c_1-d_1 \\ a_2-d_2 & b_2-d_2 & c_2-d_2 \\ a_3-d_3 & b_3-d_3 & c_3-d_3 \end{bmatrix}\right|. \tag{9}$$

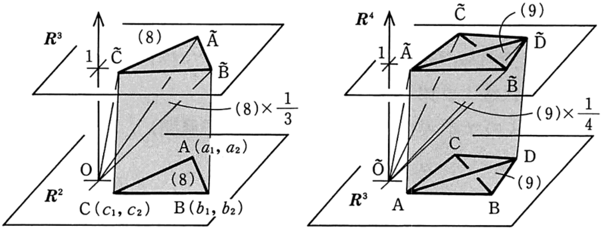



**図2**　三角柱 ABC-$\tilde{\mathrm{A}}\tilde{\mathrm{B}}\tilde{\mathrm{C}}$,「四面体柱」ABCD-$\tilde{\mathrm{A}}\tilde{\mathrm{B}}\tilde{\mathrm{C}}\tilde{\mathrm{D}}$

---

(9)で $\frac{1}{6} = \frac{1}{3!}$ の理由は以下の通り．簡単のため，まず単位立方体 $C = P(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = \{[x_1, x_2, x_3] \mid 0 \leqq x_1, x_2, x_3 \leqq 1\}$ で考える．$x_i$ が互いに異なる点を考えれば，$x_1 < x_2 < x_3$ か，$x_2 < x_1 < x_3$ か，…，$x_3 < x_2 < x_1$ かの6通りがある．それぞれの場合は(3文字の)置換に対応しているから

$$C_{ijk}=\{[x_1, x_2, x_3]\in C \mid 0\leqq x_i\leqq x_j\leqq x_k\leqq 1\}\qquad (i, j, k \text{ は相異なる})$$

とすれば，$C=C_{123}\cup C_{132}\cup C_{213}\cup C_{231}\cup C_{312}\cup C_{321}$．各 $C_{ijk}$ は四面体で，座標の番号付けしか違わないから，同じ体積をもつ．それが $3!=6$ 個集まって体積 1 の $C$ を作るから，各 $C_{ijk}$ の体積は $\dfrac{1}{3!}$ である．これを一斉に 1 次変換して考えれば，一般のときも $\dfrac{1}{6}$ でよい．

---

A, B, C, D を 4 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^4$ の「高さ 1」(第 4 成分が 1)の点 $\tilde{\mathrm{A}}, \tilde{\mathrm{B}}, \tilde{\mathrm{C}}, \tilde{\mathrm{D}}$ に持ち上げれば，(9)は 2 つの四面体 ABCD, $\tilde{\mathrm{A}}\tilde{\mathrm{B}}\tilde{\mathrm{C}}\tilde{\mathrm{D}}$ を「3 次元底面」とする柱(図 2 右)の 4 次元体積である． □

行列式を体積とみると，(2)の同値は「平行体 $P(\boldsymbol{v}_1,\cdots, \boldsymbol{v}_n)$ がつぶれない」「$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が独立な方向を向いている」と読みかえられる．

ところで $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が正規直交基底のとき，平行体 $P(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)$ は $n$ 次元の単位立方体で体積 1 のはずである．確かめておこう．

$U=[\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n]$ とすれば，正規直交性 $(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_k)=\delta_{jk}$ は ${}^tUU=1$ と言いかえられる：実際

$$ {}^tUU=\begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{u}_1 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{u}_n \end{bmatrix}[\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n]=\begin{bmatrix} (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1) & \cdots & (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_n) \\ & \vdots & \\ (\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_1) & \cdots & (\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_n) \end{bmatrix}=E. \tag{10}$$

このような(つまり，正規直交基底を並べてできる)実行列 $U$ を**直交行列**という．(10)の両辺の行列式をとれば $|U|^2=1$．したがって直交行列の行列式は $|U|=\pm 1$ で，その絶対値として $\mathrm{vol}_n\, P(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)=1$．

また，$\mathrm{vol}_n\, P$ は直交行列 $U$ を掛ける 1 次変換で不変であることも(行列式の乗法性から)わかる：

$$\mathrm{vol}_n\, P(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n)=\mathrm{vol}_n\, P(U\boldsymbol{v}_1, \cdots, U\boldsymbol{v}_n).$$

$U$ 倍は $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ が定める $n$ 次元立方体を傾いた立方体にうつすだけだから，これも自然である(図 3)．

**問** (i) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & x \\ 2 & 0 & 2 & y \\ 3 & 3 & 0 & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0,\ x, y, z\geqq 0$ で定まる空間の図形を描け．

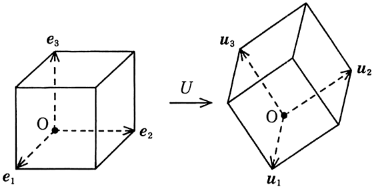



図3　直交行列は単位立方体を単位立方体にうつし，体積を変えない．

(ii)　3点 P, Q, R を，それぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ にとる．(i)の図形と平面 OPQ, OQR, ORP の囲む領域の体積を求めよ．

## 12.3　向きと行列式

$\boldsymbol{R}^n$ における「向き」も行列式と関係がある．まずは4次元以上でも「向き」を考えられるかが問題である．3次元のときを思いだす(§ 7.4)：順番も考えた2組の基底を，基底であることを保ちつつ連続的に変形し，両者がうつりあうかどうかが問題だった．そこで

### 向きという概念の満たすべき性質

$n$ 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ における向きとは，$\boldsymbol{R}^n$ の順序を考えた基底に対して**定まるべき**次のような概念である：2組の基底 $A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ と $B = (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$ は，基底であることを保ったまま，この順に(つまり，$\boldsymbol{a}_1$ を $\boldsymbol{b}_1$ に，…，$\boldsymbol{a}_n$ を $\boldsymbol{b}_n$ に)連続的に変形できるとき同じ向きであり，そうでなければ違う向きである．　□

列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を順番に並べれば，それは行列である．$A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ を行列とみれば，「基底である」は「$|A| \neq 0$」と読める．つまり

$$M_{n,n}(\boldsymbol{R})^{\times} = \{\text{行列式が 0 でない } n \text{ 次実正方行列}\}$$

の2点 $A, B$ を $M_{n,n}(\boldsymbol{R})^{\times}$ の中で(連続な)曲線で結べるか(連続に変形できるか)が問題である．次が成り立つ．

**定理 25** $M_{n,n}(\boldsymbol{R})^{\times}$ の 2 点 $A, B$ を $M_{n,n}(\boldsymbol{R})^{\times}$ の中の連続曲線で結べる $\Longleftrightarrow$ $\det A$ と $\det B$ が同符号. □

---

**証明のあらすじ** 岩澤分解を思いだす(10 章). $|A| \neq 0$ なら, $A$ を直交行列 $Q$ と上三角行列 $U$ の積にできた：$A = QU$. $U$ の対角成分はすべて正だったが, $U$ は行列式が正のまま, 単位行列 $E$ まで連続的に変形できる：

$$U = \begin{bmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ O & & \nu \end{bmatrix} \xrightarrow{(\text{イ})} \begin{bmatrix} \lambda & & O \\ & \ddots & \\ O & & \nu \end{bmatrix} \xrightarrow{(\text{ロ})} E.$$

対角線以外の上三角部分をいっせいに $t$ 倍し($0 \leqq t \leqq 1$), $t = 1$ から $t = 0$ まで動かすのが(イ)である. すなわち $U$ の対角成分をとりだした行列を $\Lambda$, 残りの上三角部分を $N$ とすると ($U = \Lambda + N$), (イ)の変形は単に $U(t) = \Lambda + tN$ ($0 \leqq t \leqq 1$). この変形は平行体を直方体にすることにあたり, この際行列式は $\lambda \cdots \nu$(対角成分の積)のままでかわらない. (なお, 行列の連続変形とは何か明確にしていないが, このように各成分がパラメータ $t$ の連続関数である, の意味としよう.) ついで各対角成分を実数直線上で 1 まで動かすのが(ロ)である. $\lambda, \cdots, \nu$ はどれも正だからこれも可逆性に影響しない.

次に直交行列 $Q$ について. オイラー角の要領で考えると(6 章), $Q$ に「回転」$R_j$ を有限($N$)個掛けて

$$R_N \cdots R_1 Q = [\pm \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n] (=: E_{\pm} \text{ とおく})$$

にできる：$Q = R_1^{-1} \cdots R_N^{-1} E_{\pm}$. 各 $R_j$ の回転角を連続的に 0 にすれば, これは $Q$ が $E_+ = E$ または $E_-$ のいずれかまで連続変形できることを意味する.

よって $A = QU$ は, $Q$ と $U$ を変形することで可逆な実行列のまま $E$ または $E_-$ まで連続変形できるが, $E$ と $E_-$ は可逆実行列の世界 $M_{n,n}(\boldsymbol{R})^{\times}$ では互いに連続に変形できない. もしできたとすると, 行列の変形にともなって $|E| = 1$ と $|E_-| = -1$ が 0 を除いた実数の中で結ばれるが(図 4), 中間値の定理よりこれは不可能だからである. (ちなみに成分に複素数をゆるせば可能である：原点を除いた複素数平面で 1 と $-1$ が結べることから想像できるだろう. 向きという概念は, 実数の範囲で考えることと結びついている.) □

---

したがって一般の次元でも向きが正と負に対応して 2 つあることになる. 次のように定義しよう.

**定義 17** $\boldsymbol{R}^n$ の基底 $A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ と $B = (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$ が同じ向き $:\Longleftrightarrow$ $\det A$ と $\det B$ は同符号. □

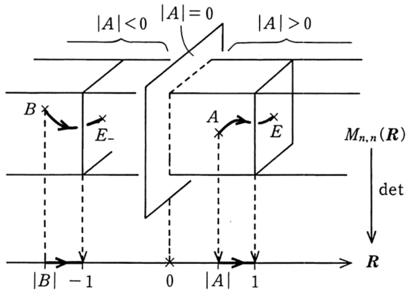



**図4** 行列式の正負と向き．行列式の符号が違う2つの実行列は $|A|=0$ の壁を越えて連続変形できない．なお壁の形は実際はもっと複雑である．

---

**注意** 「$\det A>0$ のとき $A$ の向きは正」としたくなるが，そうしないのには理由がある．ベクトルの表示に $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を用いているが，この基底やその向きに絶対的な意味はない．(平面 $\boldsymbol{R}^2$ に $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ をどう描くか，はじめからきまっていないのと同様である．) そこでこれを規準にして $A=[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n]$ の向きを名づけても，やはり絶対的な意味はない．しかし2つの基底 $A, B$ の(行列とみたときの)行列式が同じ符号であるかどうかは(規準とする基底によらず)意味がある．それが上の定義である．

---

定義より明らかに「行列式が正の実行列を掛ける1次変換で向きは変わらない」．こうして経験が高次元に拡張された．

まとめれば，実行列 $A$ の行列式 $\det A$ は，絶対値が $A$ 倍になる体積変化(拡大率)を，符号が $A$ が向きをかえるかどうか(「裏返す」か)を表す．

よって行列式は，単位立方体の像である平行体(5)の向きつき体積とも言える．2次行列式の乗法性は，拡大率と向きの見方では自然だった(2章)．$n$ 次でもまったく同じである．

---

1変数の積分で変数変換 $y=y(x)$ をすると，各点で積分区間の伸縮がおこり，$dy=\dfrac{dy}{dx}dx$ と考えることになる．積分範囲で $\dfrac{dy}{dx}$ が符号をかえれば，積分の打ち消しあいがおこるが，むしろそれによって単調でない変数変換も許される．

$n$ 重積分の変数変換 $y_j=y_j(x_1, \cdots, x_n)$ $(j=1, \cdots, n)$ では，同様に積分領域の伸縮・裏返しがおこる．これを補償するには，積分領域の体積が各点でどう変化するかを，向きも考慮しつつ考えなくてはならない(p. 38)．そこで変数変換の1次近似

の行列式として現れるのが，**ヤコビ行列式**（ヤコビアン）$\det\left[\dfrac{\partial y_j}{\partial x_k}\right]_{j,k=1,\cdots,n}$ である．

---

**問**　$\boldsymbol{R}^2$ の2つの基底 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, $(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1)$ は互いに異なる向きを定める．$\boldsymbol{R}^3$ の2つの基底 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, $(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ は同じ向きを定めるか．また $\boldsymbol{R}^4$ の2つの基底 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4)$, $(\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ についてはどうか，判定せよ．

## 12.4　外積代数と小行列式

$\boldsymbol{R}^3$ のベクトル積は，2つのベクトルが張る平行四辺形の面積と，その法線方向を与えるものだった．$\boldsymbol{R}^n$ の $d(\leqq n)$ 個のベクトルの組を考えるとき，これらが張る平行体の $d$ 次元体積が意味をもつはずである．そこで行列式の類似を考えよう．$d$ 個の $n$ 次元ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_d$ に対しきまる「もの」を，仮に

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_d \rangle \tag{11}$$

と書く．これが各 $\boldsymbol{v}_j$ について線型

$$\begin{aligned}&\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, (a\boldsymbol{v}_j + b\boldsymbol{v}_j'), \cdots, \boldsymbol{v}_d \rangle \\ &\quad = a\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_j, \cdots, \boldsymbol{v}_d \rangle + b\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_j', \cdots, \boldsymbol{v}_d \rangle\end{aligned} \tag{12}$$

であり，「体積」であるからには

$$\langle \cdots, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}, \cdots \rangle = 0 \qquad (2\text{辺が重なれば}\ 0) \tag{13}$$

をみたしているとしよう．長方行列 $[\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_d]$ に対し行列式モドキを考えるわけである．行列式と同様

$$\langle \cdots, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \cdots \rangle = -\langle \cdots, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}, \cdots \rangle$$

という交代性が(12)と(13)より出る．よって，このような「もの」は $j(1), \cdots, j(d)$ に重複がないときの

$$\langle \boldsymbol{e}_{j(1)}, \cdots, \boldsymbol{e}_{j(d)} \rangle \tag{14}$$

の和で表され，$j(1) < \cdots < j(d)$ としてよい．このような $j(1), \cdots, j(d)$ のとりかたは $\dfrac{n!}{d!(n-d)!} = {}_n\mathrm{C}_d$ 個だけある．($d > n$ なら0個．$d = n$ のときはただ1個で，$1 < 2 < \cdots < n$ に対する $\langle \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ を1と定めて得られるのが行列式である．)

以上で条件は使いつくした．${}_n\mathrm{C}_d$ 個の(14)は互いに無関係(1次独立)と考え，改めて

$$\boldsymbol{e}_{j(1)} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{j(d)}$$

と表す．この和として定まる(11)のことも

$$\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_d$$

と書き，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_d$ の**外積**とよぶ．外積は，交代性

$$\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{w}\wedge\boldsymbol{v} \tag{13'}$$

をみたす線型な演算(**外積代数**)を定める．

**例2** $n=4$ とし，$\boldsymbol{a} = {}^t[a_1, a_2, a_3, a_4]$，$\boldsymbol{b} = {}^t[b_1, b_2, b_3, b_4]$ とする($d = 2$)．$\boldsymbol{e}_j\wedge\boldsymbol{e}_k = -\boldsymbol{e}_k\wedge\boldsymbol{e}_j$ なので

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}(=-\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}) &= (a_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+a_4\boldsymbol{e}_4)\wedge(b_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+b_4\boldsymbol{e}_4)\\ &= (a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2+(a_1b_3-a_3b_1)\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3\\ &\quad+\cdots+(a_3b_4-a_4b_3)\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4\\ &= \varDelta_{1,2}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2+\varDelta_{1,3}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3+\varDelta_{1,4}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_4\\ &\quad+\varDelta_{2,3}\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3+\varDelta_{2,4}\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_4+\varDelta_{3,4}\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_4.\end{aligned}$$

ただし $\varDelta_{j,k} = \begin{vmatrix} a_j & b_j \\ a_k & b_k \end{vmatrix}$ であり，これらを$(4, 2)$型行列$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$の**2次小行列式**とよぶ．幾何的には，$\varDelta_{12}$ は $\boldsymbol{R}^4$ で $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形 $P(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ の第1, 2成分だけの「影」の面積で，他も同様である[2)]．

---

一般に $\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{e}_1a_{1,j}+\cdots+\boldsymbol{e}_na_{n,j}$ $(1\leqq j\leqq d)$ のとき

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_d &= (\boldsymbol{e}_1a_{1,1}+\cdots+\boldsymbol{e}_na_{n,1})\wedge\cdots\wedge(\boldsymbol{e}_1a_{1,d}+\cdots+\boldsymbol{e}_na_{n,d})\\ &= \sum_{j(1)=1}^{n}\cdots\sum_{j(d)=1}^{n}\boldsymbol{e}_{j(1)}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{j(d)}a_{j(1),1}\cdots a_{j(d),d}.\end{aligned}$$

これは $j(1), \cdots, j(d)$ が勝手に1から $n$ まで動く和だが，交代性により

$$\sum_{j(1)<\cdots<j(d)}\boldsymbol{e}_{j(1)}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{j(d)}\left(\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}\sigma\, a_{1,j(\sigma(1))}\cdots a_{k,j(\sigma(d))}\right)$$

($\sigma$ は $d$ 文字の置換を動く)に等しい．この係数は，$(n, d)$型行列$[\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_d]$から $j(1), \cdots, j(d)$ の $d$ 個の行をとって作った $d$ 次**小行列式**である．($\boldsymbol{R}^3$ のベクトル積(§7.5(21))と比較せよ．) $d$ 次の外積 $\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_d$ は，$d$ 個のベクトルが成す $d$ 次元平行体が各 $j(1)<\cdots<j(d)$ 方向におとす「影」の情報を集めたものと考えることができる．($\boldsymbol{R}^3$ のベクトル積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}(d=2)$ も本来はそう考えるべきであろう．)

次の問(i)は，ベクトル積について成立していたこと($|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ が平行四辺形の面積を与える)の類似である．

---

**問** 例2について次を示せ．

(i) $P(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})(=\{s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}\,|\,0\leqq s, t\leqq 1\})$ の面積 $\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}$ は，影

からピタゴラス的に $\sqrt{\sum_{j<k} \Delta_{j,k}^2}$ として与えられる．

（ii） $\Delta_{j,k}$ は独立でなく，**プリュッカー関係式**（の最も簡単な場合）をみたす：$\Delta_{1,2}\Delta_{3,4}-\Delta_{1,3}\Delta_{2,4}+\Delta_{1,4}\Delta_{2,3}=0$．［ヒント：$(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})=0$.］

## 12.5 特殊な行列式

特殊な行列式が決定的役割をはたすことがある．1つだけ述べておこう．

**命題（ヴァンデルモンドの行列式）**

$$\begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)$$

ここで $\prod$ は積の記号（和の記号 $\sum$ にあたる）：右辺は $i<j$ をみたす $i,j=0,\cdots,n$ に対する，$\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個の $a_j-a_i$ の積を表す．たとえば

$$\begin{aligned} n=1 \text{ のとき} \quad & (a_1-a_0), \\ n=2 \text{ のとき} \quad & (a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_1-a_0), \\ n=3 \text{ のとき} \quad & (a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2) \\ & \times(a_2-a_0)(a_2-a_1) \\ & \times(a_1-a_0). \end{aligned}$$

**証明** 基本変形し，第2行以下から第1行を引くと

$$\text{左辺} = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 0 & a_1-a_0 & a_1^2-a_0^2 & \cdots & a_1^n-a_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_n-a_0 & a_n^2-a_0^2 & \cdots & a_n^n-a_0^n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1-a_0 & a_1^2-a_0^2 & \cdots & a_1^n-a_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-a_0 & a_n^2-a_0^2 & \cdots & a_n^n-a_0^n \end{vmatrix}$$

$$= (a_1-a_0)\cdots(a_n-a_0)\begin{vmatrix} 1 & a_1+a_0 & a_1^2+a_1a_0+a_0^2 & & a_1^{n-1}+a_1^{n-2}a_0+\cdots+a_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n+a_0 & a_n^2+a_na_0+a_0^2 & & a_n^{n-1}+a_n^{n-2}a_0+\cdots+a_0^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{16}$$

ここで第2列，…，第 $n$ 列から第1列の $a_0$ 倍，$a_0^2$ 倍，…，$a_0^{n-1}$ 倍を引くと

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2+a_1a_0 & & a_1^{n-1}+a_1^{n-2}a_0+\cdots+a_1a_0^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2+a_na_0 & & a_n^{n-1}+a_n^{n-2}a_0+\cdots+a_na_0^{n-2} \end{vmatrix}$$

を得る．次に第3列，…，第 $n$ 列から第2列の $a_0$ 倍，…，$a_0^{n-1}$ 倍を引く．これで第3列から $a_0$ が除かれる．同様に続けることで各列の和が除かれ

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{17}$$

となり，サイズが1つ減る．(16)をみれば，$n$ が減ったときの比は $(a_1-a_0)\cdots(a_n-a_0)$ である．$n=0$ のとき $|1|=1$ であることとあわせて命題を得る．□

この命題にはあざやかな別証明がある．左辺は $a_0$ について $n$ 次式である．そして $a_0=a_1$ のとき(第1行が第2行と一致するので) 0 となり，$a_1-a_0$ で割り切れる．同様に $a_0=a_1,\cdots,a_n$ の $n$ 個の点で0となるから，$\prod_{k=1}^{n}(a_k-a_0)$ で割り切れる．他の変数でも同じだから，右辺の $\prod_{j<k}(a_k-a_j)$ で割り切れる．両辺とも各 $a_j$ について $n$ 次だから，商は定数である．この定数は $a_1^1a_2^2\cdots a_n^n$ の係数をみて1とわかる．

**問**　$A=[a_{ij}]$ は $n$ 次**反対称行列** ${}^tA=-A$ (つまり $a_{ij}=-a_{ji}$) とする．

( i )　$n$ が奇数なら，$|A|=0$ であることを示せ．

(ii)　$n=4$ のとき，$|A|=(a_{12}a_{34}-a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23})^2$ を示せ．

(iii)　$n=2N$ のとき，$a_{ij}$ たちの $N$ 次式 $\varphi(A)$ があって，$|A|=\varphi(A)^2$ であることを示せ．$\varphi(A)$ を $A$ の**パフィアン** Pfaffian とよぶ．

## 道案内

1）　行列式の応用は多い．

三村征男編『大学演習・代数学と幾何学』裳華房(1956)

は幾何学への応用に詳しい(問題 12-3 もこの本による)．練習問題 12-6 の終結式なども，最近は計算機上の代数の観点から重要である．またパフィアン(§ 12.5 の問)にはソリトン(孤立波)解をもつ非線型方程式の厳密解を与えることなどに著しい応用がある：

広田良吾『直接法によるソリトンの数理』岩波書店(1992)

伊達悦朗・三輪哲二・神保道夫『ソリトンの数理』岩波講座応用数学(1993)

佐藤幹夫講義録(1984 年度～1985 年度)京都大学数理解析研究所

2）　例 2 において $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を 2 次行列 $P$ で $[\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]P$ にとりかえると，$\Delta_{j,k}$ はすべて $|P|$ 倍になる．よって $\Delta_{j,k}$ の比は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が張る部分空間 $W$ できまる．たとえば $\Delta_{1,2} \neq 0$ なら 4 つの比 $\Delta_{1,3}/\Delta_{1,2}$, $\Delta_{2,4}/\Delta_{1,2}$, $\Delta_{1,4}/\Delta_{1,2}$, $\Delta_{2,3}/\Delta_{1,2}$ が($W$ できまり，かつ)独立で，$\Delta_{3,4}$ は(15)できまる．$\boldsymbol{R}^4$ の 2 次元部分空間 $W$ の自由度は $d(n-d) = 2(4-2) = 4$ だった(10 章)．4 つの比は($\Delta_{1,2} \neq 0$ の) $W$ を決める座標になる(プリュッカー座標)．

## 練習問題

**12-1**　(i)　$xy$ 平面の 3 直線 $a_ix+b_iy+c_i = 0 (i = 1, 2, 3)$ がある共通の点で交わるとき，$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ であることを示せ．

(ii)　空間の 4 平面 $a_ix+b_iy+c_iz+d_i = 0$, $[a_i, b_i, c_i, d_i] \neq \boldsymbol{0}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ がある共通の点で交わるとき，$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0$ であることを示せ．

(iii)　(i)(ii)の逆が成り立てば証明し，成り立たなければ反例を示せ．

**12-2**　$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m \in \boldsymbol{R}^n$ に対し，$G := [(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_k)]_{j,k=1,\cdots,m}$ を**グラム行列**，$|G| = \det[(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_k)]_{j,k=1,\cdots,m}$ を**グラム行列式**という．ここで $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = {}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の標準的内積である．以下を示せ．

(i)　$m = n$ のとき，$\mathrm{vol}_n P(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = \sqrt{\det[(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_k)]_{j,k=1}^n}$．

(ii)　グラム行列式が 0 でない $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ が 1 次独立．

(iii)*　一般にグラム行列式の平方根は平行体 $P(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m) = \{c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_m\boldsymbol{v}_k \mid 0 \leqq c_i \leqq 1\ (i = 1, \cdots, m)\} \subset \boldsymbol{R}^n$ の $m$ 次元体積を与えることを，$m$ 次元体積をしかるべく定義して示せ．

**12-3** 平面の 4 点 $\mathrm{P}(x_j, y_j)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ 相互の距離を $d_{ij} = \overline{\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j}$ とおく．4 点が同一円上にあれば $\det[d_{ij}^2] = 0$ であることを示そう．

(i) 円の方程式を $(x^2+y^2)+ax+by+c = 0$ とし，$\boldsymbol{v}_j = {}^t[x_j^2+y_j^2, x_j, y_j, 1]$ とすれば，$A = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4]$ の行列式は 0 であることを示せ．

(ii) $\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix} = \left| \begin{bmatrix} 1 & -2x_1 & -2y_1 & x_1^2+y_1^2 \\ 1 & -2x_2 & -2y_2 & x_2^2+y_2^2 \\ 1 & -2x_3 & -2y_3 & x_3^2+y_3^2 \\ 1 & -2x_4 & -2y_4 & x_4^2+y_4^2 \end{bmatrix} \cdot A \right| = 0$ を示せ．

**12-4*** **コーシーの行列式** $C := \left|\dfrac{1}{x_i-y_j}\right|_{i,j=1,\cdots,n} = \dfrac{\prod\limits_{i<j}(x_i-x_j)(y_j-y_i)}{\prod\limits_{i,j=1}^{n}(x_i-y_j)}$ を示そう．

(i) $f = \prod\limits_{i,j=1}^{n}(x_i-y_j)$ を掛けると，$fC$ は(有理式でなく)多項式になり，かつ $x_i = x_j$ または $y_j = y_j$ $(i \neq j)$ のとき 0 となる．これを示せ．

(ii) (i)より $fC$ は $\prod\limits_{i<j}(x_i-x_j)(y_i-y_j)$ で割れる．割った結果が定数であること，それが $(-1)^{n(n-1)/2}$ であることを示せ．

**12-5** $m \leqq n$ とする．$m$ 個の数ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m \in \boldsymbol{K}^n$ $(\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$ が 1 次独立であることは，$(n, m)$ 型行列 $A = [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m]$ のある $m$ 次小行列式が 0 でないことと同値である．これを示せ．

**12-6*** (i) $a_m, b_n \neq 0$ とする．次を示せ：多項式 $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$，$g(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n$ が共通根をもつ $\Longleftrightarrow$ **終結式** $|R| = 0$,

$$\text{ただし}\quad R := \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & & O \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & O & & a_0 & a_1 & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & & b_n & & O \\ & & & \ddots & & & \\ & O & b_0 & b_1 & \cdots & & b_n \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n\,\text{行} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m\,\text{行} \end{matrix} \quad \text{とする．}$$

(ii) 2 次方程式 $ax^2+bx+c = 0$ が重根を持つとき，および 3 次方程式 $ax^3+cx+d = 0$ が重根を持つときの係数に対する条件を，(i)を用いてそれぞれ求めよ．

# 13章：行列の対角化

一般サイズの正方行列の対角化は線型代数における目標の１つである．3章で扱った２次のときと同じく，その行列ごとの固有の方向を考えることに対角化の意義がある．$n$ 次のときの技術的側面が問題であるが，２次のときと同様，固有値は $n$ 次の行列式で表される方程式を解けば得られる．解の存在を保証するため，複素数の範囲で考えると便利である．

## 13.1　固有ベクトルと対角化

$A$ を $n$ 次行列とする．２次のときと同じく，$\boldsymbol{v} \neq 0$ がある数 $\lambda$ に対し

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \tag{1}$$

をみたすとき，$\boldsymbol{v}$ を $A$ の**固有値** $\lambda$ の**固有ベクトル**とよぶ(§3.4)．(1)は

$$(A-\lambda)\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \quad \text{あるいは} \quad (A-\lambda E)\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \tag{2}$$

($E$ は単位行列)と書け，$A-\lambda E$ が逆行列をもてば $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ となってしまう．よって $\lambda$ が $A$ の固有値であるためには

$$\det(A-\lambda E) = 0 \tag{3}$$

でなくてはならない．(3)を２次行列のときと同じく $A$ の**固有方程式**あるいは**特性方程式**とよぶ．また左辺を固有多項式あるいは特性多項式とよぶ．

ベクトルへの作用が(2)のように同じであるから，以後行列 $A-\lambda E$ を(第１部でもそうしたように)簡単に $A-\lambda$ と書こう．一般に

$$|A-\lambda| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

からは対角成分の積として $(-\lambda)^n$ が現れるから，固有方程式(3)は $\lambda$ の $n$ 次代数方程式である．(なお $|\lambda-A| = 0$ を代わりに考えれば，$|\lambda-A| = (-1)^n|A-\lambda|$ であり $\lambda^n$ の係数を１にできる．)

**例 1**　$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ の固有多項式を求めると

$$|A-\lambda|(=|A-\lambda E|)=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix} \tag{4}$$
$$=(2-\lambda)^3-2(2-\lambda)=(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+2).$$ □

係数が(有理数や実数も含め)複素数の $n$ 次代数方程式の解は，複素数の範囲で重複度をこめてちょうど $n$ 個存在する(ガウスによる**代数学の基本定理**)．そこで(任意の複素行列 $A$ について，必要ならば複素数解を考え)，(3)の解を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ としよう．重解があればもちろん繰り返す．

すると各 $k$ に対し，$|A-\lambda_k|=0$ より $\mathrm{Ker}(A-\lambda_k)\neq\{\mathbf{0}\}$ であり，
$$(A-\lambda_k)\boldsymbol{v}_k=\mathbf{0} \qquad \therefore \quad A\boldsymbol{v}_k=\lambda_k\boldsymbol{v}_k \tag{5}$$
をみたす $\boldsymbol{v}_k\neq\mathbf{0}$ がある(12章定理22)．これらを並べれば
$$[A\boldsymbol{v}_1, \cdots, A\boldsymbol{v}_n]=[\lambda_1\boldsymbol{v}_1, \cdots, \lambda_n\boldsymbol{v}_n]$$
$$=[\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n]\Lambda \qquad \left(\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n\end{bmatrix}\right)$$
となり，$X:=[\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ とおけば $AX=X\Lambda$ である．よって $X$ が逆行列を持てば $A$ は対角化できる：
$$X^{-1}AX=\Lambda \qquad (X=[\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n]). \tag{6}$$

---

**注意**　$A$ が実行列でも，固有方程式のすべての解が実数でない限り，固有ベクトルは複素数の範囲で探さなくてはならない．これは2次行列で経験済みである．そこで必要に応じ，固有方程式(特性方程式)の根 $\lambda$ は**特性根**と呼び，$\lambda$ に対する固有ベクトルが元の数の範囲($A$ が実なら実数の範囲)で存在するときのみ固有値とよんで区別することがある．

---

**例2**　例1の場合を続けよう．(4)より，特性根は $\lambda=2, 2\pm\sqrt{2}$．$A$ も特性根もすべて実なので，$(A-\lambda)\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ の解である固有ベクトルも実ベクトルとして存在する(つまり，特性根＝固有値！)．

● $\lambda=2$ のとき．
$$(A-2)\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{v}=\mathbf{0} \text{ を解くと，} \boldsymbol{v}/\!/\boldsymbol{v}_2:=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}.$$

● $\lambda = 2\pm\sqrt{2}$ のとき．複号は同順として，$(A-2\mp\sqrt{2})\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \mp\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \mp\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \mp\sqrt{2} \end{bmatrix}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を解くと，$\boldsymbol{v} /\!/ \boldsymbol{v}_{\pm} := \begin{bmatrix} 1 \\ \mp\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

いずれも係数行列 $A-\lambda$ は階数 2 であり，解がスカラー倍を除いてきまる ($\mathrm{Ker}(A-\lambda)$ は $3-2=1$ 次元)．これらが求める固有ベクトルである[1].

$$
\begin{aligned}
A[\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_+, \boldsymbol{v}_-] &= [A\boldsymbol{v}_2, A\boldsymbol{v}_+, A\boldsymbol{v}_-] \\
&= [2\boldsymbol{v}_2, (2+\sqrt{2})\boldsymbol{v}_+, (2-\sqrt{2})\boldsymbol{v}_-] \\
&= [\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_+, \boldsymbol{v}_-]\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7}
$$

であるから，$X := [\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_+, \boldsymbol{v}_-] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列を左から掛ければ $A$ が対角化される：

$$
X^{-1}AX = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{bmatrix}.
$$

□

上の例では $|X| = -4\sqrt{2} \neq 0$ より $X^{-1}$ の存在がわかるが，一般に

**定理 25** $A$ は(実または複素) $n$ 次正方行列であり，固有方程式(3)の解 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ が互いに異なるとする．このとき固有ベクトルを並べた行列 $X = [\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$(6) は可逆で，$A$ は $X$ で対角化される．

**証明** $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立ならよい．

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

とし，$c_1 = \cdots = c_n = 0$ を示そう．$A$ を掛けると

$$c_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\lambda_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

である．繰り返し掛ければ，$m = 1, 2, 3, \cdots$ に対し

$$c_1\lambda_1^m\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\lambda_n^m\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}.$$

$m = 0, \cdots, n-1$ について行列にまとめれば

$$O=[c_1\boldsymbol{v}_1,\cdots,c_n\boldsymbol{v}_n]\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ & & \vdots & \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix} \tag{8}$$

となる．現れたのはヴァンデルモンド行列式(§ 12.5)の行列で，仮定 $\lambda_j-\lambda_k\neq 0\ (j\neq k)$ より可逆である．よって逆行列を右から掛ければ

$$O=[c_1\boldsymbol{v}_1,\cdots,c_n\boldsymbol{v}_n].$$

各 $\boldsymbol{v}_k\neq\boldsymbol{0}$ ゆえ $c_1=\cdots=c_n=0$ である．□

**例 3**　$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$．$|A-\lambda|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+1$ である．これを 0 とおき $\lambda=1$，$\omega_\pm=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ (1 の原始 3 乗根)を得る．

$$(A-1)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\qquad (A-\omega_\pm)\boldsymbol{v}=0$$

を解けば固有値 1，固有値 $\omega_\pm$ の固有ベクトルが得られる．具体的には

$$\begin{bmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\qquad \begin{bmatrix}-\omega_\pm&1&0\\0&-\omega_\pm&1\\1&0&-\omega_\pm\end{bmatrix}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$$

であるから，解はそれぞれ次のスカラー倍である：

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{v}_\pm=\begin{bmatrix}1\\\omega_\pm\\\omega_\pm^2\end{bmatrix}$$

(複号同順．$\boldsymbol{v}_\pm$ は複素ベクトルとなる)これら固有ベクトルを並べた行列を

$$X=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_+,\boldsymbol{v}_-]=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&\omega_+&\omega_-\\1&\omega_+^2&\omega_-^2\end{bmatrix}$$

とすれば，$AX=X\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\omega_+&0\\0&0&\omega_-\end{bmatrix}$．定理よりこの例でも $X$ は可逆で

$$X^{-1}AX=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\omega_+&0\\0&0&\omega_-\end{bmatrix}$$

を得る．検算として両辺の行列式をとってみると，$1=1$ ($\omega_+\omega_-=1$ であ

る)．また$(X^{-1}AX)^n = X^{-1}A^nX$ と $A^3=1$ より，右辺も3乗すれば1のはずだが，これも $\omega_\pm^3 = 1$ より確認できる．　□

**問**　(i)　次の行列を対角化せよ．$\begin{bmatrix} -3 & 6 & 4 \\ -5 & 8 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

(ii)　$n$ 次行列 $A=[a_{ij}]$ の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とするとき，次を示せ．

$$\lambda_1 \cdots \lambda_n = \det A,\quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr} A\,(= a_{11} + \cdots + a_{nn},\ \S 6.2).$$

## 13.2　三角化とケーリー-ハミルトンの定理

対角化はつねにできるとは限らないが，正方行列の三角化はつねにできる．これを示そう．まず，固有方程式(3)が重根をもつ場合であっても，$\lambda$ が根でさえあれば

$$(A-\lambda)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

をみたす $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ がある．これを補い基底 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ を作れば

$$A[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]\left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & * & \cdots & * \end{array}\right]$$

の形になる($\lambda_1 = \lambda$．また右下の $n-1$ 次行列を $A_1$ とおいた)．$X_1 := [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ は基底を並べたのだから $|X_1| \neq 0$，よって $X_1^{-1}$ が存在し

$$A = X_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ \boldsymbol{0} & A_1 \end{bmatrix} X_1^{-1}. \tag{9}$$

$A_1$ について同様に考えれば

$$X_2^{-1}A_1X_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & * \\ \boldsymbol{0} & A_2 \end{bmatrix},\qquad A_1 = X_2 \begin{bmatrix} \lambda_2 & * \\ \boldsymbol{0} & A_2 \end{bmatrix} X_2^{-1}$$

とできるから，これを(9)に代入すれば

$$A = X_1 \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline \boldsymbol{0} & X_2 \begin{bmatrix} \lambda_2 & * \\ \boldsymbol{0} & A_2 \end{bmatrix} X_2^{-1} \end{array}\right] X_1^{-1}$$

$$= X_1\left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & X_2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & * & * \\ \hline 0 & \lambda_2 & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_3 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & X_2^{-1} \end{array}\right]X_1^{-1}$$

の形となる．以下同様にして，$A_3, \cdots$ の固有ベクトルを用いて 0 を下三角部分に作ってゆけばよく，結果は

$$A = XTX^{-1}, \qquad T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{10}$$

の形となる．このとき

$$|A-\lambda E| = |X^{-1}AX-\lambda E| = \begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda & * & \cdots & * \\ & \lambda_2-\lambda & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ O & & & \lambda_n-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$$

となるから，(10)の対角線上に並ぶ $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ はすべて $A$ の固有方程式の根である．まとめれば

**定理 26**　任意の正方行列 $A$ に対し，ある可逆行列 $X$ をとると，$X^{-1}AX$ を(上)三角行列(10)にできる．(ただし，その特性方程式が因数分解できる数の範囲で考える．)　またこのとき，$X^{-1}AX$ の対角成分は固有方程式をみたす．　□

これを用いて，$n$ 次行列に対するケーリー–ハミルトンの定理が導かれる．

**定理 27 (ケーリー–ハミルトンの定理)**　任意の正方行列 $A$ に対し，その固有(特性)多項式を $p_A$ とする：$p_A(t) = |A-tE|$．すると

$$p_A(A) = O.$$

**証明**　$A$ の固有多項式の因数分解を

$$p_A(t) = (\lambda_1-t)(\lambda_2-t)\cdots(\lambda_n-t)$$

としよう．$t$ に $A$ を代入した式は，(10)を用いて

$$\begin{aligned} p_A(A) &= (\lambda_1-A)(\lambda_2-A)\cdots(\lambda_n-A) \\ &= (\lambda_1-XTX^{-1})(\lambda_2-XTX^{-1})\cdots(\lambda_n-XTX^{-1}) \\ &= X(\lambda_1-T)(\lambda_2-T)\cdots(\lambda_n-T)X^{-1} \end{aligned} \tag{11}$$

と変形できる．$T$ は(10)の三角行列であるので

$$\lambda_1-T = \begin{bmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_1-\lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_1-\lambda_n \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2-T = \begin{bmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_2-\lambda_n \end{bmatrix}, \qquad \cdots,$$

$$\lambda_n-T = \begin{bmatrix} \lambda_n-\lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_n-\lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

つまり，$\lambda_j-T(=\lambda_jE-T)$ は $j$ 番目の対角成分も 0 となる．はじめの 2 つを掛けると，$(\lambda_1-T)(\lambda_2-T)$ は第 2 列まで $\mathbf{0}$ である．さらに掛けてゆくと $(\lambda_1-T)\cdots(\lambda_n-T)=O$ が確かめられる．よって(11)より，$p_A(A)=O$．　□

2 次行列のときと同様に(§ 4.3)，ケーリー-ハミルトンの定理を使って固有ベクトルを求めることができる．

$$p_A(A) = (A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)\cdots(A-\lambda_nE) = O$$

であるから，$(A-\lambda_2E)\cdots(A-\lambda_nE)$ の任意の列ベクトル $\boldsymbol{w}$ は

$$(A-\lambda_1E)\boldsymbol{w} = 0$$

をみたす．$\lambda_1$ 以外の特性根に対しても同様である．

$$\begin{aligned} Q_j &:= \prod_{1\leqq k\leqq n,\, k\neq j}(A-\lambda_k) \\ &= (A-\lambda_1)\cdots(A-\lambda_{j-1})(A-\lambda_{j+1})\cdots(A-\lambda_n) \end{aligned} \tag{12}$$

($\Pi$ は和の記号 $\Sigma$ と同様で，積を表す記号)を考えよう．$Q_j$ は，$(A-\lambda_k)(A-\lambda_l)=(A-\lambda_l)(A-\lambda_k)$ より掛ける順序によらず定まり，

$$\begin{aligned}(A-\lambda_j)Q_j &= (A-\lambda_1)\cdots(A-\lambda_{j-1})(A-\lambda_j)(A-\lambda_{j+1})\cdots(A-\lambda_n)\\ &= p_A(A)=O\end{aligned}$$

となる．よって $Q_j$ の列ベクトルは固有値 $\lambda_j$ の固有ベクトルである．

**例 4**　例 1 の 3 次行列の場合に，上の $Q_j$ ((12)式) を計算してみよう．

$$A-2=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix},$$

$$A-(2\pm\sqrt{2})=\begin{bmatrix}\mp\sqrt{2} & -1 & 0\\ -1 & \mp\sqrt{2} & -1\\ 0 & -1 & \mp\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad (A-2)(A-2\mp\sqrt{2})=\begin{bmatrix}1 & \pm\sqrt{2} & 1\\ \pm\sqrt{2} & 2 & \pm\sqrt{2}\\ 1 & \pm\sqrt{2} & 1\end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$(A-2-\sqrt{2})(A-2+\sqrt{2})=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}. \tag{14}$$

これらの列ベクトルはたしかに(それぞれ固有値 $2\mp\sqrt{2}, 2$ の)固有ベクトルになっている．　□

**問**　例 3 の $A$ について，ケーリー--ハミルトンの定理を確かめよ．また $Q_1=(A-\omega_+)(A-\omega_-)$，$Q_\pm=(A-1)(A-\omega_\mp)$ を計算せよ．

## 13.3　固有空間への射影

$A$ は $n$ 次(実または複素)正方行列とする．簡単のため複素ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^n$ の中で考え，$\lambda\in\boldsymbol{C}$ に対し

$$V(\lambda):=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{C}^n\,|\,A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}\}=\mathrm{Ker}(A-\lambda) \tag{15}$$

と書こう．これは $\boldsymbol{0}$ および $\lambda\in\boldsymbol{C}$ を固有値とする固有ベクトルからなる部分ベクトル空間である(核は一般に部分ベクトル空間である！)．$V(\lambda)\neq$

$\{\mathbf{0}\}$ が $\lambda$ が固有値のときであり，$V(\lambda)$ を $A$ の固有値 $\lambda$ の**固有空間**とよぶ．

簡単のため，以下では固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ がすべて異なる場合を考えよう．$\boldsymbol{v}_j \neq \mathbf{0}$ を固有値 $\lambda_j$ の固有ベクトルとすれば，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が基底となった．仮定より $V(\lambda_j) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{v}_j$ であり，このことは

$$\boldsymbol{C}^n = \boldsymbol{C}\boldsymbol{v}_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{C}\boldsymbol{v}_n = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n) \tag{16}$$

とも表せる(§9.2)．任意の $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{C}^n$ を固有空間の元の和として，一通りに

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n \tag{16$'$}$$

と表せるわけであるが，左辺の $\boldsymbol{v}$ に対し右辺の $c_j\boldsymbol{v}_j$ を対応させる写像

$$\boldsymbol{C}^n \ni c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n \mapsto c_j\boldsymbol{v}_j \in V(\lambda_j) \tag{17}$$

を**固有空間 $V(\lambda_j)$ への射影**という．

前節の $Q_j$ を少し修正することで((20)式)，各直和成分 $V(\lambda_j)$ への射影は $A$ の式として具体的に与えることができる．これが本節の目標である．

**補題(ラグランジュの補間多項式)**　$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は相異なるとする．与えられた数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ に対し，

$$f(t) := \sum_{j=1}^{n} y_j \prod_{k \neq j} \frac{t-\lambda_k}{\lambda_j-\lambda_k} \tag{18}$$

は $f(\lambda_j) = y_j$ $(j = 1, \cdots, n)$ をみたす唯一の $n-1$ 次多項式を与える．

**証明**　左辺は $t$ についての $n-1$ 次式である．よって $n$ 個の点での値できまる．そこで各 $t = \lambda_i$ において考えると，和の $j = i$ 番目の項が $y_j$ となる以外は 0 となる．つまり $f(\lambda_i) = y_i$ $(i = 1, \cdots, n)$．　□

そこで $y_1 = \cdots = y_n = 1$ のときの(18)を考えると

$$\sum_{j=1}^{n} \prod_{k \neq j} \frac{t-\lambda_k}{\lambda_j-\lambda_k} = 1 \tag{19}$$

である．たとえば $n = 2, 3$ のとき($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を $\lambda, \mu, \nu$ と書けば)

$$\frac{t-\mu}{\lambda-\mu} + \frac{t-\lambda}{\mu-\lambda} = 1,$$

$$\frac{(t-\mu)(t-\nu)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)} + \frac{(t-\lambda)(t-\nu)}{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)} + \frac{(t-\lambda)(t-\mu)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)} = 1.$$

恒等式(19)の $t$ に $A$ を代入すると，左辺で $A^m$ $(m \neq 0)$ は打ち消しあい

$$\sum_{j=1}^{n}\prod_{k\neq j}\frac{A-\lambda_k}{\lambda_j-\lambda_k}=E \tag{20}$$

である．この和の各項を $P_j$ とおけば

$$P_j=\prod_{k\neq j}\frac{A-\lambda_k E}{\lambda_j-\lambda_k}=\frac{(A-\lambda_1)\cdots(A-\lambda_{j-1})(A-\lambda_{j+1})\cdots(A-\lambda_n)}{(\lambda_j-\lambda_1)\cdots(\lambda_j-\lambda_{j-1})(\lambda_j-\lambda_{j+1})\cdots(\lambda_j-\lambda_n)},$$

$$P_1+\cdots+P_n=E \tag{21}$$

である．$P_j$ は定数倍を除き前節(12)の $Q_j$ だから，$P_j\boldsymbol{v}$ は固有値 $\lambda_j$ の固有ベクトルとなる．つまり

$$\mathrm{Im}\,P_j\subset V(\lambda_j).$$

今は仮定より $V(\lambda_j)$ は1次元だから，$\mathrm{Im}\,P_j=V(\lambda_j)$ もすぐわかる．((20)の両辺の像の次元(階数)を考えれば，$\mathrm{Im}\,P_j$ は0または1次元ゆえ

$$n=\mathrm{rank}\,E\leqq\sum_{j=1}^{n}\mathrm{rank}\,P_j\leqq n \qquad \text{(練習問題 9-5(i)参照)}$$

$n<n$ とならぬためには各 $\mathrm{rank}\,P_j=1$，つまり $\mathrm{Im}\,P_j=V(\lambda_j)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}_j$.)

(21)より，任意の $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{C}^n$ に対し

$$\boldsymbol{v}=P_1\boldsymbol{v}+\cdots+P_n\boldsymbol{v},\qquad P_j\boldsymbol{v}\in V(\lambda_j). \tag{21'}$$

分解(16′)は一通りだから，$P_j\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}$ の $V(\lambda_j)$成分を与える．すなわち(21)の $P_j$：$\boldsymbol{C}^n\to V(\lambda_j)$ が(16)における射影作用素である．

**例5** ひき続き例1の $A$ について．(13),(14)より

$$P_2=\frac{(A-2-\sqrt{2})(A-2+\sqrt{2})}{(2-2-\sqrt{2})(2-2+\sqrt{2})}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix},$$

$$P_{2\pm\sqrt{2}}=\frac{(A-2)(A-2\pm\sqrt{2})}{(2\pm\sqrt{2}-2)(2\pm\sqrt{2}-2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&\pm\sqrt{2}&1\\\pm\sqrt{2}&2&\pm\sqrt{2}\\1&\pm\sqrt{2}&1\end{bmatrix}$$

$(P_2+P_{2+\sqrt{2}}+P_{2-\sqrt{2}}=E.)$ $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ の $V(2)$ 成分，$V(2\pm\sqrt{2})$ 成分は

$$P_2\boldsymbol{v}=\frac{x-z}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\qquad P_{2\pm\sqrt{2}}\boldsymbol{v}=\frac{x\pm\sqrt{2}\,y+z}{4}\begin{bmatrix}1\\\pm\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$$

となる．($\because$ $\mathrm{Im}\,P_2=V(2)$, $\mathrm{Im}\,P_{2\pm\sqrt{2}}=V(2\pm\sqrt{2})$.)

$P_2+P_{2+\sqrt{2}}+P_{2-\sqrt{2}}=E$ であるから，これらを(複号もこめて)加えればもとの $\boldsymbol{v}$ が得られる．□

**定理 28 (射影作用素の性質)**　(20)の射影作用素 $P_j$ について $\mathrm{Im}\,P_j=V(\lambda_j)$ であり，さらに次が成り立つ．

$$E=P_1+\cdots+P_n \qquad (単位の分解), \tag{22}$$

$$P_jP_k=P_kP_j=O \qquad (j\neq k),\qquad P_j^2=P_j \qquad (べき等性). \tag{23}$$

**証明**　$\mathrm{Im}\,P_j=V(\lambda_j)$ はすでに示した．また(22)は(21)そのものである．ともに $A$ の多項式で定義されたから $P_jP_k=P_kP_j$ も明らかである．$j\neq k$ としよう．任意の $\boldsymbol{v}$ に対し $\boldsymbol{w}:=P_j(P_k\boldsymbol{v})=P_k(P_j\boldsymbol{v})$ は $V(\lambda_j)$ の元でもあり，$V(\lambda_k)$ の元でもある．このとき

$$A\boldsymbol{w}=\begin{cases}\lambda_j\boldsymbol{w} & (\boldsymbol{w}\in V(\lambda_j)\text{ とみた})\\ \lambda_k\boldsymbol{w} & (\boldsymbol{w}\in V(\lambda_k)\text{ とみた})\end{cases}$$

より $(\lambda_j-\lambda_k)\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$, $\lambda_j\neq\lambda_k$ だから $\boldsymbol{w}=\mathbf{0}$.
すなわち $P_j(P_k\boldsymbol{v})=P_k(P_j\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$ であり，これは $P_jP_k=O$ を意味する．そこで $E=P_1+\cdots+P_n$ に $P_j$ をかければ

$$P_j=O+\cdots+P_j^2+\cdots+O=P_j^2.$$
□

---

**注意**　逆に性質(22), (23)をみたす線型写像 $P_1,\cdots,P_n$ があれば，全空間は像 $\mathrm{Im}\,P_j$ の直和になる．実際(22)より任意の元 $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}=P_1\boldsymbol{v}+\cdots+P_n\boldsymbol{v}\in\mathrm{Im}\,P_1+\cdots+\mathrm{Im}\,P_n$ と表せる．$\boldsymbol{v}\in\mathrm{Im}\,P_j\cap\mathrm{Im}\,P_k$ が $\mathbf{0}$ のみなら，この和は直和である(§10.2)．これは次のように確かめられる：$\boldsymbol{v}=P_j\boldsymbol{w}$ とすると $P_j\boldsymbol{v}=P_j^2\boldsymbol{w}=P_j\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}$ ゆえ，$\boldsymbol{v}=P_j\boldsymbol{v}=P_k\boldsymbol{v}$. $P_k$ 倍すれば(23)より $\mathbf{0}=P_k\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$. □

---

$A$ の作用は，固有空間をとって考えれば固有値倍となり単純である．これを実際に行なうのが対角化に使う座標変換(基底のとりかえ)の行列 $X$ であるが，固有空間への射影 $P_1,\cdots,P_n$ も(固有ベクトル方向をとりだすの

であるから)同様の働きをする．

例として，固有空間への射影を用いて行列の指数関数の計算をしてみよう．正方行列 $A$ の指数関数を，2次のときと同じく次で定義する(§5.5)．

$$e^A := E + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{24}$$

$e^A$ が任意の $A$ に対し収束することを16章で示すが，$A$ を

$$A = X\Lambda X^{-1}, \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

と対角化できれば，$\Lambda^k$ は各 $\lambda_j$ を $k$ 乗するだけなので

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(X\Lambda X^{-1})^k}{k!} = X\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!}\right)X^{-1} = Xe^{\Lambda}X^{-1},$$

$$e^{\Lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

と計算できる．

一方(21′)において，$P_j\boldsymbol{v}$ は固有値 $\lambda_j$ の固有ベクトルとなるから

$$A\boldsymbol{v} = AP_1\boldsymbol{v} + \cdots + AP_n\boldsymbol{v} = \lambda_1 P_1\boldsymbol{v} + \cdots + \lambda_n P_n\boldsymbol{v}. \tag{25}$$

これは $A$ が各項に $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 倍で作用するという(固有ベクトルだから当たり前の)式を出したにすぎないが，$A^2, A^3, \cdots$ について同様に考えれば

$$e^{tA}\boldsymbol{v} = e^{t\lambda_1}P_1\boldsymbol{v} + \cdots + e^{t\lambda_n}P_n\boldsymbol{v}$$

を得る．これが任意の $\boldsymbol{v}$ について成り立つのだから

$$e^{tA} = e^{t\lambda_1}P_1 + \cdots + e^{t\lambda_n}P_n$$

であり，$P_1, \cdots, P_n$ がわかれば($X^{-1}$ を計算せずに)$e^{tA}$ が求まる．

**例6** 例1の場合，

$$e^{tA} = e^{2t}P_2 + e^{(2+\sqrt{2})t}P_{2+\sqrt{2}} + e^{(2-\sqrt{2})t}P_{2-\sqrt{2}}$$

であるが

$$e^{2t}P_2 = \frac{e^{2t}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$e^{(2\pm\sqrt{2})t}P_{2\pm\sqrt{2}} = \frac{e^{(2\pm\sqrt{2})t}}{4}\begin{bmatrix} 1 & \pm\sqrt{2} & 1 \\ \pm\sqrt{2} & 2 & \pm\sqrt{2} \\ 1 & \pm\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

である．よってこれらを加えることにより

$$e^{tA} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & -e^{2t} \\ 0 & 0 & 0 \\ -e^{2t} & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} + \frac{e^{(2+\sqrt{2})t}}{4}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$+\frac{e^{(2-\sqrt{2})t}}{4}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{e^{2t}}{2}\begin{bmatrix} 1+\mathrm{ch}\sqrt{2}\,t & \sqrt{2}\,\mathrm{sh}\sqrt{2}\,t & -1+\mathrm{ch}\sqrt{2}\,t \\ \sqrt{2}\,\mathrm{sh}\sqrt{2}\,t & 2\mathrm{sh}\sqrt{2}\,t & \sqrt{2}\,\mathrm{sh}\sqrt{2}\,t \\ -1+\mathrm{ch}\sqrt{2}\,t & \sqrt{2}\,\mathrm{sh}\sqrt{2}\,t & 1+\mathrm{ch}\sqrt{2}\,t \end{bmatrix}$$

$\left(\mathrm{ch}\, s = \dfrac{e^s+e^{-s}}{2},\ \mathrm{sh}\, s = \dfrac{e^s-e^{-s}}{2}\right.$ は双曲線関数$)$である．□

---

**注意**　射影作用素としては，内積があるときにあるベクトル $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ の方向への影を求める直交射影があった(§ 10.3)．$\boldsymbol{u}$ が長さ 1 なら

$$P_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{u}$$

である．ベクトルがすべて実の列ベクトルならば

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}, \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\,{}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$$

であるから，

$$P_{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}\,{}^t\boldsymbol{u}$$

とも書ける．

一方，本節で射影を構成する際には内積を用いなかったことに注意しよう．例1の $A$ についてはどちらも可能である．長さを調節した固有ベクトル

$$\boldsymbol{u}_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_\pm := \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ \mp\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

は正規直交となり，

$$P_2 = \boldsymbol{u}_2\cdot{}^t\boldsymbol{u}_2, \qquad P_\pm = \boldsymbol{u}_\pm\cdot{}^t\boldsymbol{u}_\pm \tag{26}$$

と書くことができる．$P_2$ について確かめてみれば

$$\boldsymbol{u}_2\cdot{}^t\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}[1, 0, -1] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_2.$$

また，ここでは簡単のため固有値(特性根)に重複がないと仮定した．この仮定が

ないと対角化可能であると限らない(次節). そして可能な場合も射影を作るには多少事情が複雑になり, 特性多項式のかわりに**最小多項式**を考える必要がある. $A$ を代入すると $O$ になる, 次数が最小の多項式が最小多項式である(練習問題 13-3).

---

**問** 問§13.1 の $A$ について, 各固有空間への射影作用素を求めよ.

## 13.4 ジョルダン標準形

すでに2次行列で, 対角化できないときの標準形を扱った. 一般にも三角化よりも精密に, 次が成り立つ.

**定理 29 (ジョルダン標準形, 18章)** $n$ 次の複素正方行列 $A$ は, 適当な複素可逆行列 $X$ で以下の形に標準化される.

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & J_{m_k}(\lambda_k) \end{bmatrix} \tag{27}$$

ただし $J_m(\lambda)$ は次の $m$ 次行列で, **ジョルダン細胞**とよばれる：

$$J_m(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & O \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \lambda \end{bmatrix}_{m\times m}. \tag{28}$$

標準形(27)は, $J_{m_j}(\lambda_j)$ の並べ方を除き $A$ で一通りに定まり, $A$ の**ジョルダン標準形**とよばれる. □

**例 7** $A = \begin{bmatrix} -1 & -7 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ のとき. 固有多項式は

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -7 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2\lambda-5 & -\lambda^2-\lambda+2 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

(第3行の $\lambda+1$ 倍, $-1$ 倍を第1, 2行へ加えた)

$$= \begin{vmatrix} 2\lambda-5 & -\lambda^2-\lambda+2 \\ 2-\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -\lambda^2+\lambda \\ 2-\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

(第2行の2倍を第1行に加えた)

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ 2-\lambda & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^3.$$

$\lambda=1$ は3重根である．固有値1の固有ベクトルは

$$(A-1)\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 & -7 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0} \tag{29}$$

より，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ のスカラー倍のみである $(\mathrm{rank}(A-1)=2=3-1)$．

そこで2次のときの経験をまねて

$$(A-1)\tilde{\boldsymbol{v}}_1 = \boldsymbol{v}_1 \tag{30}$$

となる $\tilde{\boldsymbol{v}}_1$ を求めてみると

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + k\boldsymbol{v}_1 \qquad (k \text{ は任意})$$

が得られる．($k$ はどう取ってもよい．)　さらに

$$(A-1)\tilde{\tilde{\boldsymbol{v}}}_1 = \tilde{\boldsymbol{v}}_1 \tag{31}$$

である $\tilde{\tilde{\boldsymbol{v}}}_1$ を探す．すると次が得られる．

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{v}}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + l\boldsymbol{v}_1 \qquad (l \text{ は任意})$$

(29), (30), (31) をまとめると

$$(A-1)[\boldsymbol{v}_1, \tilde{\boldsymbol{v}}_1, \tilde{\tilde{\boldsymbol{v}}}_1] = [0, \boldsymbol{v}_1, \tilde{\boldsymbol{v}}_1] = [\boldsymbol{v}_1, \tilde{\boldsymbol{v}}_1, \tilde{\tilde{\boldsymbol{v}}}_1]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\therefore \quad A[\boldsymbol{v}_1, \tilde{\boldsymbol{v}}_1, \tilde{\tilde{\boldsymbol{v}}}_1] = [\boldsymbol{v}_1, \tilde{\boldsymbol{v}}_1, \tilde{\tilde{\boldsymbol{v}}}_1]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる．$X = [\boldsymbol{v}_1, \tilde{\boldsymbol{v}}_1, \tilde{\tilde{\boldsymbol{v}}}_1]$ は可逆であり $(|X|=-1)$，

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = J_3(1) \qquad \left( X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

となる．これが $A$ のジョルダン標準形である．　□

3次行列の標準形は，この他に

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix}(\text{対角化可能}), \qquad \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & J_2(\mu) \end{array}\right]$$

というパターンがある．一般には，(26)に現れるひとつの $J_{m_j}(\lambda_j)$ $(j=1, \cdots, k)$ の部分を取り出してみれば，$A-\lambda_j$ の作用が

$$(A-\lambda_j)[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_{m_j}] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_{m_j}]\begin{bmatrix} 0 & 1 & & O \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & 0 \end{bmatrix}$$

つまり

$$(A-\lambda_j)\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}, \qquad (A-\lambda_j)\boldsymbol{v}_l = \boldsymbol{v}_{l-1} \qquad (l=2, \cdots, m_j)$$

となるようなベクトル達がとれ，このようなベクトルたちからなる基底が必ずある．これが定理の内容である[2)]．このことの証明を第3部の目標の1つとし，第2部を終えることにしよう．

**問**　(i)　例7を確認せよ．

(ii)　$B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 10 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ を次の方針でジョルダン標準形にせよ．

ア)　固有多項式を求めよ．($\lambda=2$ が重根である．)

イ)　固有値2の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_2$ を求めよ．

ウ)　イ)の $\boldsymbol{v}_2$ に対し，$(B-2)\tilde{\boldsymbol{v}}_2 = \boldsymbol{v}_2$ となる $\tilde{\boldsymbol{v}}_2$ をとれ．

エ)　$X^{-1}BX$ がジョルダン標準形となるような $X$ を与えよ．

## 道案内

1)　一般に $A-\lambda$ の階数が $n-k (k \geqq 1)$ ならば，固有値 $\lambda$ の固有ベクトルは $k$ 次元存在する．対角化のためには，この $\lambda$ に対しては(1個でなく)1次独立な $k$ 個を求めるべきである．

なお例1の固有ベクトルは通常の内積で互いに直交している．これは4章と同様の事情で，$A$ が実対称行列であることによる．応用上重要な直交行列(およびユニタリ行列)による対角化について，くわしくは15章で論ずる．

2)　対角化を計算機で数値的に行うには岩澤(QR)分解を使う **QR アルゴリズム**が有名であり，数学的にも非常に興味深い．三重対角行列 $A$ に対し，$A = QR$ を岩澤(QR)分解とし $A_1 = RQ$ とする．次に $A_1$ を $A_1 = Q_1R_1$ と岩澤(QR)分解し，$A_2 = R_1Q_1$ とする．これを繰り返すと $A, A_1, A_2, \cdots$ は次第に上三角行列になり，極限で対角成分が $A$ の固有値を与えるというのである．これについては以下を参照せよ：

森正武『数値解析』共立出版(第2版，2002)

中村佳正(編)『可積分系の応用数理』裳華房(2000)

木村英紀『線形代数』東京大学出版会(2003)

このほかにも行列の数値的(計算機上の)取扱いについて本書では立ち入ることができないが，まとまった本として以下を挙げておく．

伊理正夫『一般線形代数』岩波書店(2003)

F. シャトラン(伊理正夫・伊理由美訳)『行列の固有値――最新の解法と応用』シュプリンガー・フェアラーク東京(新装版，2003)

A. S. Householder "*The Theory of Matrices in Numerical Analysis*" Dover (1975，初版1964)

# 練習問題

**13-1** 次の行列を対角化せよ．

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (v) $E+xA$, $A=\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

**13-2** 数列 $a_{n+3}=-4a_{n+2}-a_{n+1}+6a_n$ の一般項を $a_0, a_1, a_2$ で表せ．

**13-3** (i) 次の行列 $A$ の最小多項式を求めよ．

ア) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ イ) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ ウ) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$

(ii) 13-1(iii)の行列について，各固有空間への射影作用素，最小多項式，および指数関数を求めよ．

**13-4** (i) ${}^tRR=E$ である実3次行列(直交行列)$R$ は実固有ベクトルをもち，その固有値は $\pm1$ のどちらかであることを示せ．

(ii) さらに $|R|=1$ とすれば，実固有値は1に限ることを示せ．(つまり，$\boldsymbol{R}^3$ の回転は必ずある方向を軸とする．)

**13-5** $n$ 次の実行列 $A=[a_{ij}]$ についても，$a_{ij}\geqq 0$ かつすべての列で成分和が $a_{1j}+\cdots+a_{nj}=1$ をみたすとき確率行列とよぶ．(4章の問題参照)

(i) 確率行列が1を固有値とすることを示せ．［ヒント：${}^tA$ を考えよ．］

(ii)* すべての $a_{ij}>0$ ならば $A^\infty=\lim_{n\to\infty}A^n$ が存在し，$A^\infty$ の階数は1であることを示せ．［ヒント：$\boldsymbol{x}={}^t[x_1,\cdots,x_n]\in\boldsymbol{R}^n$ が $x_1\geqq 0,\cdots,x_n\geqq 0$ のとき $\boldsymbol{x}\geqq\boldsymbol{0}$，$x_1>0,\cdots,x_n>0$ のとき $\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}$ と書くと，条件より $\boldsymbol{x}\geqq 0\Rightarrow A\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}$．］

**13-6** $A_n=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & O \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ O & & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ($n$ 次)，$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} x-x^{-1} \\ x^2-x^{-2} \\ \vdots \\ x^n-x^{-n} \end{bmatrix}$ とおく．

(i) $(x+x^{-1}-A_n)\boldsymbol{v}$ を計算せよ． (ii) $A_n$ の固有値を求めよ．

# [第三部 展開編]

## 一般のベクトル空間—さまざまな数学への扉

# 14章：一般のベクトル空間

第1部，第2部では，実数または複素数が並んだ数ベクトルと，その全体＝数ベクトル空間を扱ってきた．第3部では一般のベクトル空間を扱うことにしよう．一般に，足し算と数を掛けること(スカラー倍)が定義された集合はなんでもベクトル空間とよぶ．本章では線型常微分方程式の解空間(§14.4)を念頭におきつつ説明しよう．

スカラー(掛ける数)の範囲としては実数全体 $\boldsymbol{R}$，複素数全体 $\boldsymbol{C}$ などを想定するが，これも一般には加減乗除をもつ集合でよい(体(たい)，付録1)[1]．

## 14.1 ベクトル空間の定義

矢印はつないだり(加法)伸ばしたり(スカラー倍)できる．これがベクトルの概念の起源だが，変数 $t$ の関数 $f(t), g(t)$ についても，和と定数倍

$$(f+g)(t) = f(t)+g(t), \qquad (cf)(t) = c\cdot f(t) \qquad (c\text{ は定数})$$

が考えられる．このように，和とスカラー倍を考えうる対象は多い．

**例1　ア)**　行列も，何倍かしたり加えたりできる．

**イ)**　数列にも，和とスカラー倍が考えられる：

$$a(c_1, c_2, \cdots)+b(c_1', c_2', \cdots) := (ac_1+bc_1', ac_2+bc_2', \cdots).$$

長さが $n$(有限)の数列は，この演算もこめてこれまで扱った $n$ 成分数ベクトル(行ベクトル)そのものである．なお関数 $f(x)$ も，その値を $(f(x_1), f(x_2), \cdots)_{x_1,x_2,\cdots}$ と「並べて」できる「数列」のように思えば[2]，上に述べた加法とスカラー(定数)倍のきめ方は数列の場合と同じである．

**ウ)**　複素数は1と $i=\sqrt{-1}$ の実数係数の1次結合で表せ，2次元実ベクトルとみなせる．同様に有理数と $\sqrt{2}$ から加減乗除を使ってできる数全体

$$\{a+b\sqrt{2} \mid a, b\text{ は有理数}\}$$

は，有理数を成分とする2次元ベクトル空間 $\boldsymbol{Q}^2$ とみなせる．

ほかにも次のような対象がある(まだ「?」でも，それで結構)：

**エ)**　$n$ 次元ベクトル $d$ 個の外積(§12.4)，

**オ)**　曲面(および一般の次元のなめらかな図形)の接ベクトル，

**カ**）　線積分 $\int_C \omega$ においても，積分路(サイクル) $C$ の加法とスカラー倍が考えられる：和は路をつなぐことである$\left(\int_{C_1+C_2}=\int_{C_1}+\int_{C_2}\right)$. 被積分関数(微分形式) $\omega$ の加法とスカラー倍も，もちろん考えられる．　□

足したり何倍かできる点で，これらにはベクトルの属性がある．「このようなもの」のなす集合をベクトル空間とよぶ… のだが，これでは堂々めぐりである．そもそも演算があるのはその集合の性質だ！　と考えよう．考える数の範囲(体)を $\boldsymbol{K}(=\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \cdots)$ と書くことにする[1].

**定義 18**　空でない集合 $V$ に**加法**＋および**スカラー倍**とよばれる次のような2つの演算があるとき，$V$ を体 $\boldsymbol{K}$ 上の**ベクトル空間**(または $\boldsymbol{K}$-ベクトル空間)という．

1）　加法の公理：「＋」は結合法則および交換法則

$$\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$$

をみたし，ある特別な元 $\boldsymbol{0}\in V$ があって次をみたす：

$$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{v} \qquad (\text{すべての } \boldsymbol{v} \text{ に対して})$$

さらに，すべての $\boldsymbol{v}$ にその逆元(逆ベクトル) $-\boldsymbol{v}$ があり，

$$\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=(-\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}.$$

2）　スカラー倍の公理：$c\in\boldsymbol{K}$ と $\boldsymbol{v}\in V$ に対して $c\boldsymbol{v}\in V$ がきまり，$1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ かつ $a(b\boldsymbol{v})=(ab)\boldsymbol{v}$ をみたす．また，次の分配法則をみたす．

$$(a+b)\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{v}, \qquad a(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=a\boldsymbol{v}+a\boldsymbol{w}$$

ここで $a, b\in\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\in V$ である．　□

**例 1′**　先の例1では，アの(成分が $\boldsymbol{K}$ の元である) $(m, n)$ 型行列の全体 $M_{m,n}(\boldsymbol{K})$，イの(各項が $\boldsymbol{K}$ の元である)数列の全体，… は，すべて $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間である．また(1変数)多項式にも

$$a(c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_kt^k)+b(c_0'+c_1't+c_2't^2+\cdots+c_k't^k)$$
$$:=(ac_0+bc_0')+(ac_1+bc_1')t+\cdots+(ac_k+bc_k')t^k$$

で加法とスカラー倍が定まる．係数を $\boldsymbol{K}$ の元とすれば

$$\{c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_kt^k \mid c_i\in\boldsymbol{K}, k=0,1,2,\cdots\}$$

は $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間で，これを $\boldsymbol{K}[t]$ と書く．　□

多項式同士は積も考えられ($t^k \cdot t^l = t^{k+l}$)，$\boldsymbol{K}[t]$ はベクトル空間より少し「高級」である．$\boldsymbol{K}[t]$ は(1変数)多項式環(かん)と呼ばれる(付録1参照)．

**定義 19** $\boldsymbol{K}$-ベクトル空間 $V$ の空でない部分集合 $W$ が和とスカラー倍で閉じているとき，$W$ を **$\boldsymbol{K}$-部分ベクトル空間(部分空間)** という．

**例 2** **ア)** $A \in M_{n,n}(\boldsymbol{K})$ は $A = {}^tA$ のとき対称(symmetric)行列，$A = -{}^tA$ のとき交代(alternating)行列という．それぞれを集めた

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{K}) &= \{A \in M_{n,n}(\boldsymbol{K}) \mid A = {}^tA\} \\ \mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{K}) &= \{A \in M_{n,n}(\boldsymbol{K}) \mid A = -{}^tA\} \end{aligned} \qquad (1)$$

はともに $M_{n,n}(\boldsymbol{K})$ の部分空間である．

**イ)** $\boldsymbol{K}[t]$ の，たかだか $n$ 次式の全体

$$\boldsymbol{K}[t]_n = \{c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n\} \subset \boldsymbol{K}[t]$$

は，$\boldsymbol{K}[t]$ のひとつの部分空間である[2]． □

**問** $V$ を $\boldsymbol{K}$-ベクトル空間とする．定義18の公理から次を導け．

(i) $k \in \boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{v} \in V$ に対し，$0\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$．

(ii) $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$．

(iii) $k\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ ならば，$k = 0$ または $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ である．

## 14.2 基底と次元，ベクトル空間の同型

$V$ を体 $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする．数ベクトルのとき(§9.2，§10.1)と同様，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m \in V$ は次をみたすとき **1次独立** であるという．

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0} \quad (c_i \in \boldsymbol{K}) \Longrightarrow c_1 = \cdots = c_m = 0$$

1次独立でないとき **1次従属** というのも同様．$V$ の **次元** $\dim_{\boldsymbol{K}} V$ も「任意の $V$ の元を一通りに表すために何個の元が必要か」として定義できる．

**定義 20** $\boldsymbol{K}$-ベクトル空間 $V$ において，元の組 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ がとれて，次の2条件をみたすとする．

(I) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ がこれらの1次結合で書ける：

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n \qquad (c_1, \cdots, c_n \in \boldsymbol{K}). \qquad (2)$$

（II）（I)の表示は，ただ一通り(**一意的**)である．すなわち

$$c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n=c_1'\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_n'\boldsymbol{v}_n \Longrightarrow c_1=c_1',\ \cdots,\ c_n=c_n'.$$

このとき $V$ は($\boldsymbol{K}$ 上)$n$ 次元であるといい，$\dim_{\boldsymbol{K}} V=n$ と書く．元の組 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ を $V$ の**基底**(basis)という． □

(II)は移項して考えれば $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ が1次独立ということである．数ベクトルのときと同様，(I)のとき $V=\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_1+\cdots+\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_n$ と書き，さらに(II)を満たせば $V=\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_n$ と書く．

(2) の $c_1, \cdots, c_n$ は $\boldsymbol{v}\in V$ の(基底 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ に関する)**座標**である．次元は $V$ に独立な「方向」がいくつあるかを表し，$V$ で一通りにきまる．証明は9章の数ベクトル空間のときとまったく同じである．

**例3**　**ア）** $\boldsymbol{K}^n=\boldsymbol{K}\boldsymbol{e}_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{K}\boldsymbol{e}_n=\bigoplus_{j=1}^{n}\boldsymbol{K}\boldsymbol{e}_j$ は $\boldsymbol{K}$ 上 $n$ 次元である．

**イ）** $M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ は行列単位 $E_{i,j}$ を基底にもち，$\boldsymbol{K}$ 上 $mn$ 次元である：

$$M_{m,n}(\boldsymbol{K})=\bigoplus_{\substack{l\leqq i\leqq m\\ l\leqq j\leqq n}}\boldsymbol{K}E_{i,j}.$$

**ウ）** $M_{n,n}(\boldsymbol{K})$ の部分空間 $\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{K})$, $\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{K})$ ((1)式) は

$$E_{i,j}+E_{j,i}\quad(i\leqq j),\qquad E_{i,j}-E_{j,i}\quad(i>j)$$

をそれぞれ基底にもち，次元は $\dfrac{n(n+1)}{2}, \dfrac{n(n-1)}{2}$ である． □

多項式環 $\boldsymbol{K}[t]$ の元 $1, t, t^2, \cdots, t^n$ は，任意の $n$ に対し1次独立になる(実際，多項式 $c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_nt^n$ が0とは，係数がすべて0であることにほかならない)．しかし $n$ をきめる限り，$\boldsymbol{K}[t]$ の元(1変数多項式)すべてを表すことはできない．このように，$V$ にいくらでもたくさんの1次独立なベクトル(の組)がとれるとき，$V$ は**無限次元**であるという[3)]．

一方，次数がたかだか $n$ の多項式の全体 $\boldsymbol{K}[t]_n$ は有限次元で，その次元は $n+1$ である：1つの基底として $\{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ がとれる．実際(多項式どうしの積を忘れ)，和とスカラー倍しか考えなければ，$n$ 次の多項式といっても係数を並べた $n+1$ 成分の数ベクトルと同じこと．つまり

$$\boldsymbol{K}[t]_n \ni \sum_{k=0}^{n} c_kt^k \longleftrightarrow [c_0, c_1, \cdots, c_n]\in \boldsymbol{K}^{n+1} \tag{3}$$

という1対1対応で，両者は和とスカラー倍のみに注目する限り「まったく同じ」である(ただし多項式を $(t+1)^k$ の和で表した係数を考えてもよく(例6)，この対応に絶対的な意味はない)．

**定義21** 2つの $\boldsymbol{K}$-ベクトル空間 $V, W$ の間に演算(和とスカラー倍)を保つ1対1対応(全単射)

$$f: V \longrightarrow W, \qquad f^{-1}: W \longrightarrow V$$

があるとき，$V$ と $W$ は**$\boldsymbol{K}$-ベクトル空間として同型**であるといい，$f: V \xrightarrow{\cong} W$ あるいは $V \cong W$ と書く．また $f$ および $f^{-1}$ を，$V$ と $W$ の同型を与える写像(**同型写像**)という．なお $f$ が演算を保つとは

$$f(a\boldsymbol{v}+a'\boldsymbol{v}') = af(\boldsymbol{v})+a'f(\boldsymbol{v}') \tag{4}$$

$(a, a' \in \boldsymbol{K},\ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V)$，つまり**線型写像**であることにほかならない． □

$n$ 次元ベクトル空間 $V$ に基底 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ をとれば，$V$ の元 $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{v}_j x_j = [\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

と一通り(一意的)に書ける．(§14.3で見るように係数 $x_j$ は右に書く方が都合よい．) (5)は $V$ と $\boldsymbol{K}^n$ の間の1対1対応を定めている：

$$f: V \ni \boldsymbol{v}_1x_1+\cdots+\boldsymbol{v}_nx_n \mapsto \boldsymbol{x} = {}^t[x_1, \cdots, x_n] \in \boldsymbol{K}^n.$$

この $f$ は($\boldsymbol{v}_j \mapsto \boldsymbol{e}_j$ できまる)線型写像であるから，$V \cong \boldsymbol{K}^n$ といえる．

逆に同型写像 $g: W \xrightarrow{\cong} \boldsymbol{K}^n$ があると，($g^{-1}$ も1対1かつ線型ゆえ) $g^{-1}(\boldsymbol{e}_1), \cdots, g^{-1}(\boldsymbol{e}_n)$ の1次結合で $W$ の元が一通りに表せ，$W$ の基底ができる($\therefore\ \dim W = n$)．つまり $\dim V = n \Leftrightarrow V \cong \boldsymbol{K}^n$ である．$f^{-1}\circ g$: $W \xrightarrow{\cong} \boldsymbol{K}^n \xrightarrow{\cong} V$ も線型かつ1対1ゆえ，$W \cong V$ でもある．まとめれば

**定理30** (i) 有限次元 $\boldsymbol{K}$-ベクトル空間 $V$ は，同じ次元の数ベクトル空間と同型である：$V \cong \boldsymbol{K}^n$，$n = \dim V$．

(ii) $\boldsymbol{K}$-ベクトル空間 $V, W$ が同型 $\Longleftrightarrow \dim V = \dim W$．

**例4** ア) (3)の1対1対応により，$\boldsymbol{K}[t]_n \cong \boldsymbol{K}^{n+1}$．

イ)　転置をとる操作 $A \mapsto {}^tA$ により，$M_{m,n}(\boldsymbol{K}) \cong M_{n,m}(\boldsymbol{K})\,(\cong \boldsymbol{K}^{mn})$．

どちらの場合もただ同型を作るだけなら，さまざまな作り方がある．たとえばイ)では(転置でなく)どう $mn$ 個の成分を入れ換えてもよい．　□

このようにベクトル空間としての演算に関する限り，次元(大きさ)以外に区別はない(しない)．もちろん具体的な個々のベクトル空間については，次元以外の手掛りで区別して考える(べき)ことは多い．

**問**　(i)　$\boldsymbol{K}$ を体とし，$\mathrm{tr}\,A=0$ である $n$ 次正方行列 $A \in M_{n,n}(\boldsymbol{K})$ の全体を $V$ とする($\mathrm{tr}\,A = a_{11}+\cdots+a_{nn}$；§6.2)．$V$ が $M_{n,n}(\boldsymbol{K})$ の部分空間になることを示し，その次元を求めよ．

(ii)　ア)　一般に $f: U \cong V$ が $\boldsymbol{K}$-ベクトル空間の同型写像であり，$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が $U$ の基底のとき，$f(\boldsymbol{u}_1), \cdots, f(\boldsymbol{u}_n)$ が $V$ の基底であることを示せ．

イ)　さらに $g: V \cong W$ ならば，$U \cong W$ であることを示せ．

## 14.3　線型写像の行列表示，基底変換の公式

$V$ と $W$ を有限次元 $\boldsymbol{K}$-ベクトル空間とし，$\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}, \{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m\}$ をそれぞれの基底とする($n=\dim V,\ m=\dim W$)．写像 $f: V \to W$ による基底の行き先を

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{w}_i F_{i,j} = [\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m]\begin{bmatrix} F_{1,j} \\ \vdots \\ F_{n,j} \end{bmatrix} \tag{6}$$

としよう．$f$ が線型写像(4)なら，これで一般の元(5)の行き先も

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}) &= f\left(\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{v}_j x_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{w}_i F_{i,j} x_j \\ &= [\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m]\begin{bmatrix} F_{1,1} & \cdots & F_{1,n} \\ & \vdots & \\ F_{m,1} & \cdots & F_{m,n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

ときまる．(7)を線型写像 $f$ の**行列表示**という．

**例5**　多項式 $p(t) \in \boldsymbol{R}[t]$ の $t$ 微分を考える：

$$\frac{d}{dt} : \boldsymbol{R}[t]_n \longrightarrow \boldsymbol{R}[t]_n,\ \ p(t) \longmapsto \frac{d}{dt}p(t).$$

$p(t)$ がたかだか $n$ 次のとき $dp/dt$ はたかだか $n-1$ 次なので，$\boldsymbol{R}[t]_n$ に制限して考えよう．微分は和を和に，定数倍を定数倍にうつし，つまり線型である．基底として $1, t, t^2, \cdots, t^n$ をとれば

$$\frac{d}{dt}[1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n] = [0, 1, 2t, 3t^2, \cdots, nt^{n-1}]$$

$$= [1, t, t^2, \cdots, t^n]\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & O \\ & 0 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & O & & 0 & n \\ & & & & 0 \end{bmatrix}}_{D}.$$

右辺の $n+1$ 次行列 $D$ が微分の行列表示である．($\boldsymbol{R}[t]$ は無限次元なので，微分の行列表示も本来は無限×無限となるが，とりあえず $\boldsymbol{R}[t]_n$ に制限したことで有限サイズになった．)　右から $\boldsymbol{c} = {}^t[c_0, \cdots, c_n]$ を掛けた

$$\frac{d}{dt}[1, t, \cdots, t^n]\boldsymbol{c} = [1, t, \cdots, t^n]D\boldsymbol{c}$$

により，$[1, t, \cdots, t^n]\boldsymbol{c} = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n = p(t)$ の微分が復元される(確かめよう)：$\dfrac{d}{dt}p(t) = 0 + c_1 + 2c_2 t^1 + \cdots + nc_n t^{n-1}$.　□

線型写像の行列表示は基底(座標系)に依存するから，基底をとりかえたらどうなるか考えておこう．まず空間 $V$ に別の基底 $\{\boldsymbol{v}'_j\}$ があるとする．

$$V = \boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{K}\boldsymbol{v}'_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{K}\boldsymbol{v}'_n \tag{8}$$

$\{\boldsymbol{v}'_j\}$ を $\{\boldsymbol{v}_j\}$ で表す式を，係数を右に書いて

$$\boldsymbol{v}'_k = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{v}_j a_{j,k} = [\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n]\begin{bmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{bmatrix} \tag{9}$$

とする．$k$ について並べて，行列で表せば

$$[\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_n] = [\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n]\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \tag{10}$$

(10) の $A=[a_{j,k}]$ を**基底変換の行列**とよぶ．このとき逆向きの基底変換を $[\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n]=[\boldsymbol{v}_1',\cdots,\boldsymbol{v}_n']A'$ とすれば

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n]&=[\boldsymbol{v}_1',\cdots,\boldsymbol{v}_n']A'\\&=([\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n]A)A'=[\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n](AA')\end{aligned}\tag{11}$$

よって $AA'=E$．同様に $A'A=E$ だから $A'=A^{-1}$ である．

また，一般の元 $\boldsymbol{v}\in V$ を 2 つの基底で表す式を

$$\boldsymbol{v}=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{v}_jx_j=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{v}_j'x_j'\tag{12}$$

としよう(係数を右にした)．これを書き換えれば

$$[\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=[\boldsymbol{v}_1',\cdots,\boldsymbol{v}_n']\begin{bmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{bmatrix}\tag{13}$$

$$\overset{(10)}{=}[\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n]\begin{bmatrix}a_{1,1}&\cdots&a_{1,n}\\ &\vdots&\\ a_{n,1}&\cdots&a_{n,n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{bmatrix}.\tag{14}$$

基底 $\{\boldsymbol{v}_j\}$ で元 $\boldsymbol{v}$ を表示する仕方は一通りだから，各 $\boldsymbol{v}_j$ の係数を比べて

$$\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{1,1}&\cdots&a_{1,n}\\ &\vdots&\\ a_{n,1}&\cdots&a_{n,n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{bmatrix}\tag{15}$$

を得る．これが基底のとりかえで生ずる座標変換である(§3.1(4)式参照)．念のため成分で書けば，$x_j=a_{j,1}x_1'+\cdots+a_{j,n}x_n'=\sum_{k=1}^{n}a_{j,k}x_k'$ である．

次に(6)の $f:V\to W$ について考える．$W$ にも 2 組の基底があり

$$W=\boldsymbol{K}\boldsymbol{w}_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{K}\boldsymbol{w}_m=\boldsymbol{K}\boldsymbol{w}_1'\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{K}\boldsymbol{w}_m'$$

$$\left([\boldsymbol{w}_1',\cdots,\boldsymbol{w}_m']=[\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_m]\begin{bmatrix}b_{1,1}&\cdots&b_{1,m}\\ &\vdots&\\ b_{m,1}&\cdots&b_{m,m}\end{bmatrix}\right)$$

であるとする．$\boldsymbol{w}=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{w}_iu_n=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{w}_i'u_i'$ とすれば

$$\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{1,1}&\cdots&b_{1,m}\\ &\vdots&\\ b_{m,1}&\cdots&b_{m,m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1'\\ \vdots\\ y_m'\end{bmatrix}\tag{16}$$

が(15)と同様に得られる．(15), (16)をそれぞれ

$$\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}',\qquad \boldsymbol{y}=B\boldsymbol{y}'$$

と書き，また(7)と同様に $f(\boldsymbol{v}'_j)=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{w}'_iF'_{ij}$ で $f$ の $\{\boldsymbol{v}'_j\},\{\boldsymbol{w}'_i\}$ による行列表示 $F'=[F'_{ij}]$ を定めよう．ここまでの状況をまとめれば (17) の通り．

$$\begin{array}{ccc} & \boldsymbol{K}^n\ni\boldsymbol{x}\overset{F}{\longmapsto}\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{K}^m & \\ & \updownarrow\qquad\quad\updownarrow & \\ A^{-1} & V\ni\boldsymbol{v}\overset{f}{\longmapsto}\boldsymbol{w}\in W & B \\ & \updownarrow\qquad\quad\updownarrow & \\ & \boldsymbol{K}^n\ni\boldsymbol{x}'\overset{F'}{\longmapsto}\boldsymbol{y}'\in\boldsymbol{K}^m & \end{array} \tag{17}$$

$F'$ と $F$ の関係を調べるのが問題だが，これより

$$\boldsymbol{y}=F\boldsymbol{x}=BF'A^{-1}\boldsymbol{x}\qquad\therefore\quad F'=B^{-1}FA. \tag{18}$$

---

**注意** 行列の左右からの基本変形はこのような形の変換だった：基本ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ から基底をとりかえて階数標準形にできたわけである．また $V=W$ のとき，基底として4組も$(\{\boldsymbol{v}_j\},\{\boldsymbol{v}'_j\},\{\boldsymbol{w}_j\},\{\boldsymbol{w}'_j\})$とることはないと考えれば，$A=B$ とした変換 $F'=A^{-1}FA$ が自然である：これも正方行列の対角化で用いた．

---

**例 6** $\boldsymbol{R}[t]_n$ の2つの基底 $\{1, t, \cdots, t^n\}$ および $\{1, t+1, (t+1)^2, \cdots, (t+1)^n\}$ の変換の行列を $T_\pm$ としよう：

$$[1, t+1, (t+1)^2, \cdots, (t+1)^n]=[1, t, t^2, \cdots, t^n]T_+,$$
$$[1, t, t^2, \cdots, t^n]=[1, t+1, (t+1)^2, \cdots, (t+1)^n]T_-.$$

すると $(t+1)^k$，$t^k=((t+1)-1)^k$ の2項展開より

$$T_\pm=\begin{bmatrix} 1 & \pm1 & 1 & \pm1 & \cdots & (\pm1)^n \\ & 1 & \pm2 & 3 & \cdots & (\pm1)^n n \\ & & 1 & \pm3 & \cdots & (\pm1)^n n(n+1)/2 \\ & & & 1 & \cdots & \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & O & & & 1 & \pm n \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

基底を往復すれば((11)式) $T_+T_-=E$, $T_-T_+=E$ であるべきだが，ともに計算で確かめられる．基底 $\{1, \cdots, (t+1)^n\}$ で微分を表示する行列 $D_1$ は

$$\frac{d}{dt}[1, t+1, (t+1)^2, \cdots, (t+1)^n]=\frac{d}{dt}[1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n]T_+$$
$$=[1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n]DT_+=[1, t+1, (t+1)^2, \cdots, (t+1)^n]T_-DT_+$$

より，$D_1=T_-DT_+$ ((18)参照)．一方 $((t+1)^k)'=k(t+1)^{k-1}$ だから，

じつは $D_1 = D$ のはず．調べると($n = 2$ とすれば)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

で正しい．これは $T_+$ が $t$ を $t+1$ にすることを，$D$ が $t$ に関する微分を表すので，$T_+D = DT_+$ であることによる：$T_-DT_+ = DT_-T_+ = D$． □

**問** $\boldsymbol{K}[t]$ から $\boldsymbol{K}[t]$ への線型写像 $\phi, \psi$ を次で定める：

$$\phi(c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_Nt^N) := c_1+2c_2t+\cdots+Nc_Nt^{N-1},$$

$$\psi(c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_Nt^N) := c_0t+\frac{c_1}{2}t^2+\cdots+\frac{c_N}{N+1}t^{N+1}.$$

(i) $\phi, \psi$ を基底 $\{1, t, t^2, \cdots\}$ により行列表示せよ．

(ii) $\phi\circ\psi \neq \psi\circ\phi$ を示せ．

## 14.4 線型常微分方程式の解空間

さて，$a_1(t), \cdots, a_n(t)$ および $f(t)$ を実数 $t$ の(実または複素数値)連続関数とし，次の**線型常微分方程式**を考えよう．

$$\frac{d^nu}{dt^n}(t)+a_1(t)\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}(t)+\cdots+a_n(t)u(t) = f(t) \tag{19}$$

左辺を簡単に $Lu(t)$ と書こう．$\dfrac{d^n}{dt^n}(u+v) = \dfrac{d^nu}{dt^n}+\dfrac{d^nv}{dt^n}$ などより，$c$ を定数とすれば

$$L(u+v) = Lu+Lv, \qquad L(cu) = c(Lu).$$

つまり，関数 $u$ を関数 $Lu$ にうつす「作用」$L$ は線型である．連立1次方程式と同様に，右辺が0の方程式 $Lu = 0$ を**斉次型**，そうでないとき**非斉次型**とよぶ．行列 $A$ の核 $\mathrm{Ker}\,A$ にならって，斉次型方程式の解全体(**解空間**)を $\mathrm{Ker}\,L$ と書こう．斉次型のときの，いわゆる**重ね合せの原理**：

$$u(t), v(t) \text{ が解}(Lu = Lv = 0),\ a, b \text{ は定数}$$
$$\Longrightarrow au(t)+bv(t) \text{ も解}(L(au+bv) = 0)$$

は，$\mathrm{Ker}\,L$ がベクトル空間であることを述べている．

**定理 31** $\mathrm{Ker}\,L = \{u\,|\,Lu = 0\}$ は $n$ 次元ベクトル空間である：基底

**(基本解系)** $u_1(t), \cdots, u_n(t)$ がとれて，斉次型の解 $u\,(Lu=0)$ はすべて一通りに $u=c_1u_1(t)+\cdots+c_nu_n(t)$ ($c_i$ は定数) と書ける． □

一般の証明は解析の本を見てもらうことにして[4]，以下では $a_i$ が定数のときを考えよう．1つの解を指定するパラメータ(解空間の「1点」の「座標」)が $n$ 個必要なことは，(19)を次のように書きかえるとみやすい．

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ u' \\ u'' \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{bmatrix} = A(t)\begin{bmatrix} u \\ u' \\ u'' \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$\left( A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & O \\ & 0 & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & O & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \right) \tag{21}$$

(20)の左辺の微分は成分ごとで，両辺の最後の成分を比べると元の方程式になっている．(21)を(19)の**同伴行列**(companion matrix)という．$a_1, \cdots, a_n$ が定数なら $A$ も定数行列である．斉次型ならば $f=0$ で，(20)は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{u} \qquad (\boldsymbol{u}(t) = {}^t[u(t), u'(t), \cdots, u^{(n-1)}(t)])$$

である．これは2次行列のとき(§5.5)と同様に行列の指数関数(§13.3)を使って $\boldsymbol{u}(t)=e^{tA}\boldsymbol{u}(0)$ と解ける[5]：$(e^{tA})'=Ae^{tA}$ より，

$$\boldsymbol{u}(t)' = (e^{tA})'\boldsymbol{u}(0) = Ae^{tA}\boldsymbol{u}(0) = A\boldsymbol{u}(t).$$

$e^{tA}\boldsymbol{u}(0)$ の第1成分が(19)の解 $u(t)$ で，$n$ 個の**初期値** $\boldsymbol{u}(0)={}^t[u(0), u'(0), \cdots, u^{(n-1)}(0)]$ できまる(**初期値に関する解の一意性**)．なお初期値は0以外の「時刻」$t=t_0$ で与えることもできる：$\boldsymbol{u}(t)=e^{(t-t_0)A}\boldsymbol{u}(t_0)$.

簡単のため複素数の範囲で考え，解空間の基底を与えてみよう．引き続き $a_i$ はすべて定数(複素数)とすると，$L$ は $\dfrac{d}{dt}$ の多項式と見ることができ，複素数の範囲では因数分解できる：$\dfrac{d}{dt}=\partial$ と書けば

$$L = \partial^n + a_1\partial^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\partial + a_n = (\partial-\lambda_1)\cdots(\partial-\lambda_n). \tag{24}$$

小さい方程式 $(\partial-\lambda_j)u(t)=0$ を解けば自動的に $Lu=0$ となるが，これは $u(t)=e^{\lambda_j t}u(0)$ と解ける(複素数 $\lambda$ の指数関数 $e^{\lambda}$ は§5.5を参照)．

$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ を $L$ の特性根とよぶ．以下これらは相異なると仮定しよう：$\lambda_j\neq\lambda_k\ (j\neq k)$．すると解 $e^{\lambda_1 t},\cdots,e^{\lambda_n t}$ は1次独立である．実際

$$c_1e^{\lambda_1 t}+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}=0 \qquad (c_i\in \boldsymbol{C})$$

とすれば，これを $k(=1,\cdots,n-1)$ 回微分し $\lambda_1^k c_1e^{\lambda_1 t}+\cdots+\lambda_n^k c_ne^{\lambda_n t}=0$,

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} \lambda_1^0 & \cdots & \lambda_n^0 \\ & \vdots & \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_ne^{\lambda_n t} \end{bmatrix}=\mathbf{0}.$$

このヴァンデルモンド行列式(§12.5)は0でないことを思い出せば，$c_1e^{\lambda_1 t}=\cdots=c_1e^{\lambda_1 t}=0$，よって $c_1=\cdots=c_n=0$．

$n$ 個の独立な解が得られたから，定理を認めればこれらが基底である：

$$\operatorname{Ker} L=\boldsymbol{C}e^{\lambda_1 t}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{C}e^{\lambda_n t}. \tag{25}$$

**例7** $L=\dfrac{d^3}{dt^3}+2\dfrac{d^2}{dt^2}-\dfrac{d}{dt}-2=\partial^3+2\partial^2-\partial-2 \quad \left(\dfrac{d}{dt}=\partial\text{ と書いた}\right)$

のとき，$L=(\partial-1)(\partial+1)(\partial+2)$．よって

$$\operatorname{Ker} L=\boldsymbol{C}e^{t}\oplus\boldsymbol{C}e^{-t}\oplus\boldsymbol{C}e^{-2t}.$$ □

---

**注意** 行列の指数関数は対角化すると計算できた．今の場合，同伴行列 $A$ に対し $|\lambda-A|=0$ を解くことになるが，実はこれは(24)で $\partial=\lambda$ としたものになる：

$$|\lambda-A|=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & & O \\ & \lambda & -1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & O & & \lambda & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & \lambda+a_1 \end{vmatrix}=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n. \tag{26}$$

これは行列式を最後の行で展開すればわかる．対角化により $e^{tA}$ を計算する解き方は，数列の場合と同様(§4.1)，$L$ を因数分解する上の方法と実質的に同じになる．

---

$f=f(t)$ が与えられた非斉次型方程式 $Lu=f$ についても考えておこう．1つの解(特解) $v$ が見つかれば，他の解 $\tilde{v}$ は $L(\tilde{v}-v)=f-f=0$ をみたすから

$$\tilde{v}=v+u, \qquad u\in\operatorname{Ker} L$$

と書ける．したがって解全体も

$$v + \mathrm{Ker}\, L \tag{27}$$

と書ける．連立1次方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$ の解全体が1つの特解 $\boldsymbol{v}$ で $\boldsymbol{v}+\mathrm{Ker}\, A$ と書けたのと同様で，(27)は $\mathrm{Ker}\, L$ を特解 $\boldsymbol{v}$ の方向に平行移動したとみなせる．

具体的に，(20)の形で考えることとし

$$\boldsymbol{v}' = A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{f} \qquad (\boldsymbol{f}(t) = {}^t[0, \cdots, 0, f(t)])$$

と書こう．未知関数を $\boldsymbol{w}(t) := e^{-tA}\boldsymbol{v}(t)$ に変換すれば

$$\boldsymbol{w}' = -e^{-tA}A\boldsymbol{v} + e^{-tA}\boldsymbol{v}' = e^{-tA}\boldsymbol{f}, \qquad \boldsymbol{w}(0) = \boldsymbol{v}(0)$$

となり，$\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{v}(0) + \int_0^t e^{-sA}\boldsymbol{f}(s)\,ds$ と解ける．よって

$$\boldsymbol{v}(t) = e^{tA}\left(\boldsymbol{v}(0) + \int_0^t e^{-sA}\boldsymbol{f}(s)\,ds\right) \tag{28}$$

と解けた(**定数変化法**)．(19)の解はこの第1成分で与えられる．

ベクトル空間の基本的な例として，線型常微分方程式の解空間をとりあげた．$e^{tA}$ の収束性や，$L$ の特性根($= A$ の固有値)に重複があるときの扱いを考える必要があるが，次章以降のお楽しみとしよう．

**問** (i) $L = \partial^3 - \partial^2 - 4\partial + 4 \left(\partial = \dfrac{d}{dt}\right)$ とする．$Lu = 0$ の解 $u_0, u_1, u_2$ を次の条件で求めよ：$\begin{bmatrix} u_0(0) & u_0'(0) & u_0''(0) \\ u_1(0) & u_1'(0) & u_1''(0) \\ u_2(0) & u_2'(0) & u_2''(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$．

(ii) (i)の $u_0(t), u_1(t), u_2(t)$ は1次独立であることを示せ．

## 道案内

1）スカラーの範囲(体) $\boldsymbol{K}$ としては，$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ 以外に 0 と 1 だけからなる **2 元体** $\boldsymbol{F}_2 = \{0, 1\}$ $(1+1=0)$ や一般の有限体(四則演算をもつ有限集合)も応用上大事である．とくに 2 元体の拡大体は，携帯電話をはじめ広く(あらゆる街角で！)用いられている：

松尾憲一『スペクトラム拡散技術のすべて——CDMA から IMT-2000, Bluetooth まで』東京電機大学出版局(2002)

2）§14.1 で出てきた $M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ および $\boldsymbol{K}[t]$ は標準的記号であるが，例 2 の記号 $\mathrm{Sym}_n$, $\mathrm{Alt}_n$, $\boldsymbol{K}[t]_n$ などは世界共通というわけではない．特に，「交代」(行列)は skew-symmetric あるいは anti-symmetric とも言われる．また §16.5 で扱うリー代数とみるときは，$\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ は $o_n$ とも書かれる．

3）無限にも大小があり，$\boldsymbol{Z}$ や $\boldsymbol{Q}$ は「可算」，$\boldsymbol{R}$ や $\boldsymbol{C}$ はより大きく「連続」である．無限次元ベクトル空間の次元も，対応して「可算次元」「連続次元」などと定められるが，本書では立ち入らないことにする．無限次元のベクトル空間には，目的に応じて「大きさの条件」を入れて考えることが多い．§15.1 例 2 など参照．

4）常微分方程式論についてはたとえば

V.I. アーノルド(足立正久，今西英器訳)『常微分方程式』現代数学社(1981)，とくに第 3 章(§27)以降を参照．

5）一般に行列 $A(t)$ が定数でないときも，$e^{tA}$ にあたるものが次のように作れる．

$$E_A(t) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int \cdots \int_{\Delta_n} dt_n \cdots dt_1 A(t_n) \cdots A(t_1) \tag{23}$$

ただし $\Delta_n = \{(t_1, \cdots, t_n) \mid 0 \leqq t_1 \leqq \cdots \leqq t_n \leqq t\}$ とする(簡単のため，$t > 0$ としよう)．これを $t$ で(形式的に)微分すると，$t_n$ 積分の上端での微分なので

$$A(t) + \sum_{n=2}^{\infty} A(t) \int \cdots \int_{\Delta_{n-1}} dt_{n-1} \cdots dt_1 A(t_{n-1}) \cdots A(t_1)$$

すなわち $\dfrac{d}{dt} E_A(t) = A(t) E_A(t)$．よって $E_A(t)\boldsymbol{v}(0)$ が $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{v}(t) = A(t)\boldsymbol{v}(t)$ の解を与え，非斉次型の解も(27)と同様に書ける．(曲面論などに現れる接続型偏微分方程式系 $\dfrac{\partial}{\partial s}\boldsymbol{v} = A(s,t)\boldsymbol{v}$, $\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v} = B(s,t)\boldsymbol{v}$ の可積分条件 $\left[\dfrac{\partial}{\partial s} - A, \dfrac{\partial}{\partial t} - B\right] = 0$ を出すこともこれを用いて見通しよくできる．

A. M. Polyakov, "*Gauge Fields and Strings*" Harwood Academic Publishers, 1987

(§7.1)参照．)

なお $A$ が定数なら，$\displaystyle\int_0^t dt_n \cdots \int_0^{t_2} dt_1 = \frac{t^n}{n!}$ により(23)は $e^{tA}$ に等しい($\mathrm{vol}(\Delta_n) = \dfrac{1}{n!}$ に注意：§12.2)．(23)を：$\exp\displaystyle\int_0^t A(t)\,dt$：とも書くことがある．

## 練習問題

**14-1**　$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{R}1 \oplus \boldsymbol{R}i \oplus \boldsymbol{R}j \oplus \boldsymbol{R}k$ を付録1の四元数体とする．($i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ である.)

(i)　$\boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{R}$-ベクトル空間として $\boldsymbol{R}^4$ と同型であるが，次の写像 $\iota$ により $\boldsymbol{C}$-ベクトル空間として $\boldsymbol{C}^2$ と同型であることを示せ：

$$\iota : \boldsymbol{H} \ni w = a+bi+cj+dk \quad \mapsto \iota(w) := \begin{bmatrix} a+bi \\ c+di \end{bmatrix} \in \boldsymbol{C}^2.$$
$$(= (a+bi)+(c+di)j)$$

ただし $\boldsymbol{H}$ への複素数 $x+iy$ 倍は左からと定める：$\boldsymbol{H} \ni a+bi+cj+dk \mapsto (x+iy)(a+bi+cj+dk)$．($a, b, c, d, x, y$ は実数.)

(ii)　$\boldsymbol{H}$ の元 $w$ に右から $\boldsymbol{H} \ni \omega = \alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ をかける写像を $f_\omega$ とする：$f_\omega(w) = w\omega$．$f_\omega$ が $\boldsymbol{C}$-線型写像であることを確かめよ．

(iii)　(i)の同型により四元数を複素2成分ベクトルとみなすとき，(ii)の線型写像 $f_\omega$ を表す2次行列($f_\omega$ の行列表示)を求めよ．[ヒント：§2.3]

**14-2**　連続写像 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ は $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$ をみたせば線型写像であることを示せ．

**14-3**　体 $\boldsymbol{K}$ の元 $a_1, \cdots, a_n \in \boldsymbol{K}$ を固定し，数列の空間 $\boldsymbol{K}^\infty = \{(x_1, x_2, \cdots) \mid x_j \in \boldsymbol{K}\}$ の元で次の漸化式をみたすものの全体を $V(\subset \boldsymbol{K}^\infty)$ とする：

$$x_{j+n} = a_1 x_j + \cdots + a_n x_{j+n-1} \quad (j = 1, 2, \cdots). \qquad (*)$$

(i)　$V$ が $\boldsymbol{K}^\infty$ の部分ベクトル空間であることを示せ．

(ii)　$i = 1, \cdots, n$ に対し $(x_1, \cdots, x_n) = {}^t\boldsymbol{e}_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ であり $(*)$ をみたす数列 $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots) = \boldsymbol{x}^{(i)}$ をとれば，$\boldsymbol{x}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(n)}$ が $V$ の基底になることを示せ．

**14-4**　$V$ を $\boldsymbol{K}$ ベクトル空間とする．$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m \in V$ で生成される(張られる) $V$ の部分空間 $W = \boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_m$ の基底は，必ずこの $m$ 個の中から選ぶことができることを示せ．

**14-5***　(i)　$f$ が与えられているとして，方程式 $\left(\dfrac{d}{dt} - \lambda\right)u(t) = f(t)$ を解け．

(ii)　$p(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$ は重根をもたないとする．$f(t)$ が与えられた非斉次型方程式 $p\left(\dfrac{d}{dt}\right)u = f$ を考えよう．

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{c_1}{x-\lambda_1} + \cdots + \frac{c_n}{x-\lambda_n} \qquad \text{(部分分数展開)}$$

であるとすれば，条件 $u(0) = 0$ をみたす解は次で与えられることを示せ：

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \int_0^t e^{\lambda_i(t-s)} f(s)\, ds.$$

(iii)　$\left(\dfrac{d}{dt} - 1\right)\left(\dfrac{d}{dt} + 1\right)\left(\dfrac{d}{dt} + 2\right)u = f$ の解 $u(t)$ を条件 $u(0) = 0$ の下に求めよ．

**14-6***　定数係数と限らない方程式(19)：$Lu=f$ を考える（$\partial=\dfrac{d}{dt}$ とすれば，$L=\partial^n+a_1(t)\partial^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(t)\partial+a_n(t)$ である）．ここで $a_1(t),\cdots,a_n(t)$ は考える区間で十分なめらかであるとする．以下を示せ．

（i）　$u_1(t),\cdots,u_n(t)$ は斉次型 $(f=0)$ の場合の $n$ 個の解とすれば

$$W(t):=\begin{vmatrix} u_1 & u_1' & \cdots & u_1^{(n-1)} \\ & & \vdots & \\ u_n & u_n' & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$ （**ロンスキ行列式**，Wronskian）

は $W'(t)=-a_1(t)W(t)$ をみたす．よって $W(t)=W(0)e^{-\int_0^t a(t)\,dt}$．

（ii）　斉次解 $u_1,\cdots,u_n$ が1次独立（$c_1,\cdots,c_n$ に対し恒等的に $c_1u_1(t)+\cdots+c_nu_n(t)=0$ ならば $c_1=\cdots=c_n=0$）$\Longleftrightarrow$ ある $t$ に対し $W(t)\neq 0$．

（iii）　$u_1(t),\cdots,u_n(t)$ を斉次解の基底としよう．$c_1(t),\cdots,c_n(t)$ が次をみたせば，$v(t)=\sum_{j=1}^{n}c_j(t)u_j(t)$ は $Lv=f$ の解を与える：

$$\begin{cases} u_1c_1'+\cdots+u_nc_n' &=0 \\ u_1'c_1'+\cdots+u_n'c_n' &=0 \\ \quad\vdots & \\ u_1^{(n-1)}c_1'+\cdots+u_n^{(n-1)}c_n' &=f(t) \end{cases} \qquad (☆)$$

**14-7**　次の $u_1(t),u_2(t),u_3(t)$ が，1つの非斉次型2階線型常微分方程式 $Lu=f$ の解であるという．その方程式をそれぞれ求めよ．

（i）　$u_1=t$，$u_2=e^t+t$，$u_3=2e^t+t+3$．

（ii）　$u_1=e^t$，$u_2=e^t+t^2$，$u_3=e^t+2t^2+1$．

# 15章：内積および正規行列

「空間」で「大きさ」をどう測るべきか(そもそも測りうるか)は，線型代数ですまない問である(とくに，無限次元の場合に問題になる)．線型代数ですむ部分として，内積および内積と仲のよい行列の標準形を扱おう．数の範囲は実数または複素数とし，経験と見通しのため後者を主に考える．

## 15.1　内積のある空間

数ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^n$ の(標準的)エルミート内積は，$\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, \cdots, x_n]$，$\boldsymbol{y} = {}^t[y_1, \cdots, y_n] \in \boldsymbol{C}^n$ に対し

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} y_j \in \boldsymbol{C} \tag{1}$$

($\boldsymbol{x}^* = [\overline{x_1}, \cdots, \overline{x_n}]$，$\overline{\phantom{x}}$ は複素共役)と定義され，以下の性質をみたしていた(§ 10.3)．

**歪対称性**　$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$　(2)

**線型性**　$(\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y}+k'\boldsymbol{y}') = k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+k'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}')$　(3)

**正値性**　$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$，かつ　$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.　(4)

**定義 22**　$\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間 $V$ の元の組に複素数を対応させる写像

$$V \times V \longrightarrow \boldsymbol{C} \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \mapsto (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{C}) \tag{5}$$

で(2), (3), (4)をみたすものを，$V$ の(正値エルミート)**内積**という．また(2), (3)をみたすものを，エルミート形式という．□

---

**注意**　(2), (3)より，第1成分 $\boldsymbol{x}$ については

$$(k\boldsymbol{x}+k'\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) = \overline{k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+\overline{k'}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})$$

となる($k, k' \in \boldsymbol{C}$)．これを**反線型性**とよぶ．第1成分について線型，第2成分について反線型の内積を考えるには，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ をすべて $\overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$ と読みかえればよい(その場合 $\boldsymbol{C}^n$ では(1)にあたる書き方が ${}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{y}}$ と多少面倒になる)．

---

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^n$ のとき，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$は成分の絶対値の2乗和で，$\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ を $\boldsymbol{x}$ の長さと考えた(ピタゴラスの定理)．一般にも $\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ とおき，これを内積(5)から定まる $\boldsymbol{x} \in V$ の**ノルム**とよぶ．また $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ なら $\boldsymbol{x}$ と

$\boldsymbol{y}$ は**直交する**といい，$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ と書く．

**例 1** 行列の成分を 1 列に並べ，$M_{m,n}(\boldsymbol{C}) \cong \boldsymbol{C}^{mn}$ (数ベクトル空間と同型)とみて行列 $A = [a_{ij}]$，$B = [b_{ij}]$ に対し内積を定めよう：

$$(A, B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}} b_{ij}.$$

すると行列単位 $\{E_{ij}\}_{i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n}$ が正規直交基底となる．

---

エルミート共役(次章(6)式)の記号を用いると，この内積は $(A, B) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_j^* \boldsymbol{b}_j$ $= \mathrm{tr}(A^*B)$ (tr は正方行列のトレース，§ 6.5) と書ける． □

---

**定理 32** 内積のあるベクトル空間 $V$ の元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し

( i ) (シュワルツの不等式) $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|$.

等号成立は，$\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{y}$ または $\boldsymbol{y} = t\boldsymbol{x}$ $(t \in \boldsymbol{C})$ のとき．

( ii ) (三角不等式) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

等号成立は，$\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{y}$ または $\boldsymbol{y} = t\boldsymbol{x}$ $(t \geqq 0)$ のとき．

(ii)は三角形の 1 辺の長さがほかの 2 辺の長さの和以下という式で，$\|\boldsymbol{x}\|$ の「長さらしさ」を示している．

**証明** ( i ) $\boldsymbol{C}^n$ の場合とまったく同様である(§ 10.3)．$\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ としてよい．$t = -(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})/\|\boldsymbol{y}\|^2 \in \boldsymbol{C}$ とすれば $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}) - t\boldsymbol{y}$ となる．

$$\therefore \quad \|\boldsymbol{x}\|^2 = \|\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}\|^2 + |t|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2 \geqq |t|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2 = |(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})|^2 / \|\boldsymbol{y}\|^2.$$

よって $\|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| \geqq |(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})|$，等号は $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ のとき．

( ii ) $$(\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2 - \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = 2\|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$
$$\geqq 2(\|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| - |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|) \geqq 0. \qquad (\because \text{(i)})$$

等号は(i)の条件に加え $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| = \dfrac{1}{2}\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\} = \mathrm{Re}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (Re は実数部分) が必要なので，$\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{y}$ または $\boldsymbol{y} = t\boldsymbol{x}$ $(t > 0)$ のとき． □

**例 2** 積分が定義された空間 $X$ (例：$X = \boldsymbol{R}$)上の複素数値関数 $f, g : X \to \boldsymbol{C}$ に対し，積分が意味をもつ限り

$$(f, g) := \int_X \overline{f(x)}\, g(x)\, dx \in \boldsymbol{C}$$

は(2), (3), (4)をみたす．シュワルツの不等式より，$\|f\|(=\sqrt{(f, f)})$，$\|g\|$が有限ならば$(f, g)$は有限である．三角不等式より$\|f+g\|$も有限ゆえ

$$L^2(X) = \{f : X \to \boldsymbol{C} \mid \|f\| < \infty\}$$

はベクトル空間になる(**2乗可積分関数の空間**)．他の「測り方」との区別のため，この内積およびノルムを$(f, g)_{L^2}$，$\|f\|_{L^2}$とも書く．

**例 2′**　上の設定で$X = \boldsymbol{N} = \{1, 2, \cdots\}$のとき，複素数値関数$X = \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{C}$とは無限数列$(a_1, a_2, \cdots) = \{a_j\}$にほかならない．内積を

$$(\{a_j\}, \{b_j\}) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{a_j} b_j$$

で考え，$(\{a_j\}, \{a_j\}) = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2$が有限な数列の全体を

$$l^2(\boldsymbol{N}) := \left\{ (a_1, a_2, \cdots) \,\middle|\, \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty \right\}$$

と書く($l^2$空間)：$l^2(\boldsymbol{N})$はエルミート内積をもつ$\boldsymbol{C}$-ベクトル空間であり，内積(1)を考えた$\boldsymbol{C}^n$の素朴な無限次元化である．　□

正値な内積をもつ有限次元ベクトル空間においては，勝手な基底に対しシュミットの直交化を実行すれば正規直交基が得られる．したがって標準的内積を持つ$\boldsymbol{C}^n$と内積もこめて「同じ」(同型)となる．じつは正値性がなくても，以下で示すようにエルミート形式はつねに標準形(14)で表せる(そのように基底をとることができる)．

**問**　(i)　$\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 + \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{w}\|^2)$を示せ．

(ii)　$\boldsymbol{R}^n$の通常の内積について$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \dfrac{1}{4}(\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2 - \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2)$である．これにならい，定義22の内積を対応するノルム$\|\cdot\|$の式で表せ．

## 15.2　正規行列とテープリッツの定理

$(m, n)$型($m$行$n$列)の複素行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ & \vdots & \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n] \in M_{m,n}(\boldsymbol{C})$$

を転置し，各成分の共役をとった$(n, m)$型行列

$$A^* := \begin{bmatrix} \overline{a_{1,1}} & & \overline{a_{m,1}} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \overline{a_{1,n}} & & \overline{a_{m,n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^* \end{bmatrix} \in M_{n,m}(\boldsymbol{C}) \tag{6}$$

を $A$ の**エルミート共役**(または随伴行列)という．${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ より，$(AB)^* = B^*A^*$．とくに $\boldsymbol{x}^*A = (A^*\boldsymbol{x})^*$ なので，$\boldsymbol{x}^*A\boldsymbol{y} = (A^*\boldsymbol{x})^*\boldsymbol{y}$．すなわち，$\boldsymbol{R}^n$ の内積の場合(§5.1(4))と同様の式が得られる：

$$(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (A^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{7}$$

**定義 23**　複素正方行列 $A = [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n] = [a_{ij}]$ について

(i)　$A = A^*$ ($\Leftrightarrow \overline{a_{ij}} = a_{ji}$) のとき，$A$ を**エルミート行列**という．$A$ が実行列なら $A = {}^tA$ と同じで，これは(実)対称行列とよんだ(§5.1)．

(ii)　$A^*A = 1$ ($\Leftrightarrow (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij} \Leftrightarrow AA^* = 1$)，すなわち $A^* = A^{-1}$ のとき，$A$ を**ユニタリ行列**という．$A$ が実行列なら ${}^tA = A^{-1}$ と同値で，これは(実)直交行列とよんだ(§12.2)．　□

**例 3**　$V$ を $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ をその基底とする．$(\ ,\ )_V$ を $V$ のエルミート形式とすれば，内積の表(グラム行列：練習問題 12-2)

$$H := [(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_k)_V]_{j,k=1,\cdots,n} \tag{8}$$

はエルミート行列である：$(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_k)_V \overset{(2)}{=} \overline{(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_j)_V}$．一般の $\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^n x_j\boldsymbol{v}_j$，$\boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^n y_j\boldsymbol{v}_j \in V$ についても $H$ から値$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_V$ が決まる：

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_V = \sum_{j,k} \overline{x_j}(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_k)_V\, y_k = \boldsymbol{x}^*H\boldsymbol{y} \tag{9}$$

$(\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, \cdots, x_n],\ \boldsymbol{y} = {}^t[y_1, \cdots, y_n])$．正値性(4)は次と同値になる．

$$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \quad \text{なら} \quad \boldsymbol{x}^*H\boldsymbol{x} > 0 \tag{10}$$

そこでこのようなエルミート行列 $H$ を**正値**(正定値)とよび，(10)を $H>0$ とも書く．

**例 4**　$C := \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$ はユニタリ行列である．

**例 5**　計算の練習．$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0})$ かつ $A$ がエルミート行列ならば

$$\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{x})\overset{(7)}{=}(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\bar{\lambda}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$$

よって $A$ の固有値は実数である．また $A$ がユニタリ行列なら

$$\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{x})=(A^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\bar{\lambda}^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \tag{11}$$

よって固有値は絶対値 1 の複素数である．　□

$n$ 次エルミート行列 $A=[a_{ij}]$ の対角成分は実数である $(\overline{a_{jj}}=a_{jj})$．$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個の上三角成分で下三角成分もきまり，$A$ は $n+2\dfrac{n(n-1)}{2}=n^2$ 個の実数できまる．これは $M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ の実次元 $2n^2$ の半分である．

一方，ユニタリ行列の条件 $U^*U=1$ は

$$U^*U\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}\quad(\forall\,\boldsymbol{w})\Longleftrightarrow\boldsymbol{v}^*U^*U\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}^*\boldsymbol{w}\quad(\forall\,\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$$
$$\Longleftrightarrow(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=(U\boldsymbol{v},U\boldsymbol{w})\quad(\forall\,\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$$

($\forall\,\boldsymbol{v}$ は「すべての $\boldsymbol{v}$ について」と読もう)と書きなおせる．最後の式は「$U$ が内積を変えない」と読めるから，内積を変えない線型写像を表すのがユニタリ行列である．例 1 の内積で測ると $\|U\|^2=n$ であり，$U$ は実 $2n^2$ 次元空間 $\boldsymbol{C}^{n^2}$ で半径 $\sqrt{n}$ の 実$(2n^2-1)$ 次元球面の上にある[1]．

エルミート共役は複素数の共役の類似と考えれば，エルミート行列は(共役で不変なので)実軸に，ユニタリ行列は(共役との積が 1 で)単位円周にあたる．これは固有値についての観察とも一致する(例 5，図 1)．

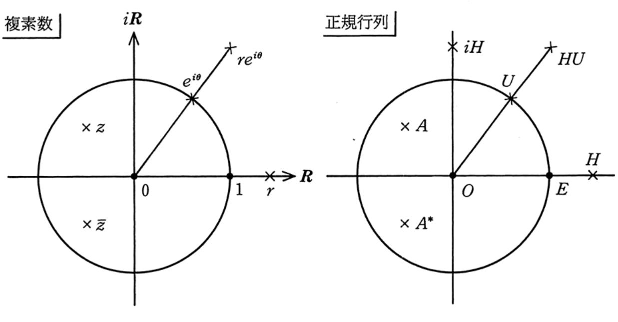



**図 1**　(正値)エルミート行列($H$)，ユニタリ行列($U$)はそれぞれ(正の)実数 $r$，絶対値 1 の複素数 $e^{i\theta}$ にあたる．

エルミート行列とユニタリ行列をともに含むよびかたとして，

**定義 24**　$AA^* = A^*A$ をみたす複素正方行列 $A$ を**正規行列**という．一般に正方行列 $A, B$ が $AB = BA$ を満たすとき，これらは**互いに可換**であるという．$A$ が $A^*$ と可換なときが正規行列である[2)]．□

**例 6**　$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{bmatrix}$ $\left(\omega = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \omega^3 = 1\right)$ は $AA^* = 3E = A^*A$ より正規行列である．また $U = \dfrac{1}{\sqrt{3}}A$ はユニタリ行列である．□

**定理 33**　正規行列 $A$ に対し，$\|A\boldsymbol{x}\| = \|A^*\boldsymbol{x}\|$．また $A$ の固有ベクトルは固有値が異なれば直交する．

**証明**　前半は例 5 でやったのと同様な計算による：

$$(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (A^*A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (AA^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (A^*\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{x}).$$

後半を示すために，さらに $A\boldsymbol{y} = \mu\boldsymbol{y}$，$\lambda \neq \mu$ とすれば

$$\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{12}$$

つまり $(\lambda-\mu)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$，$\therefore\ \ \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$．□

**定理 34（テープリッツの定理）**　$A$ を複素正方行列とするとき

$A$ が正規行列 $\Longleftrightarrow$ $A$ はあるユニタリ行列 $U$ で対角化できる：

$$U^*AU = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{13}$$

これが本章の主役の基本定理である．主張は次節で示す「⇒」にあり，「⇐」は簡単に確かめられる：$\Lambda\Lambda^* = \Lambda^*\Lambda$ なので，$UU^* = 1$ ならば

$$AA^* = U\Lambda U^* \cdot U\Lambda^* U^* = U\Lambda\Lambda^* U^* = U\Lambda^*\Lambda U^* = AA^*.$$ □

---

(13)で $\lambda_i$ が実数の場合が，エルミート行列に対応する：$A^* = U^*\Lambda^*U^{**} = U^*\Lambda U = A$．同様に絶対値 1 の複素数をならべた $\Lambda$ からユニタリ行列ができる．定理よりユニタリ行列はそれで尽きるわけである．

---

**例 7 (エルミート形式の標準化)**　(8)にさっそく定理 33 を使い，$U^*HU = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ と対角化しよう．このとき(9)を $U^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' = {}^t[x_1', \cdots, x_n']$ と座標変換すれば

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_V = \boldsymbol{x}'^* U^*HU\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'^*\Lambda\boldsymbol{x}' = \lambda_1|x_1'|^2+\cdots+\lambda_n|x_n'|^2 \quad (14)$$

$X_j := x_j'\sqrt{|\lambda_j|}$ とし，正の項を先にして添字をつけかえれば

$$|X_1|^2+\cdots+|X_p|^2-|X_{p+1}|^2-\cdots-|X_{p+q}|^2 \quad (15)$$

となる．＋－ の個数を並べた$(p, q)$を，このエルミート形式の**符号数**という．(14)は $(p, q) = (n, 0)$ のとき正値で，このとき $U$ と $\sqrt{\Lambda} := \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$ により

$$[\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n] = [\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n]U\sqrt{\Lambda}^{-1} \quad (16)$$

と定めれば，$(\boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{w}_k)_V = \delta_{jk}$ (正規直交基)となる(確かめよう)．

**問**　(i)　$A = B+iC$ で $B, C$ はエルミート行列とする．次を示せ：
$A$ が正規行列 $\Longleftrightarrow BC = CB$.
(ii)　$A$ は正規で $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}(\lambda \in \boldsymbol{C})$ とする．$A^*\boldsymbol{v} = \bar{\lambda}\boldsymbol{v}$ を示せ．

## 15.3　定理 34 の証明：同時三角化

§14.3(例 6)で考えた $\boldsymbol{R}[t]_n$ の線型写像 $D$(微分を表す)と $T_\pm$(変数のずらし $t \mapsto t\pm1$ を表す)について，$DT_\pm = T_\pm D$ だった．これらは基底 $\{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ で見ると，同時に上三角行列で表されていた．一般にも

**補題**　$A, B \in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ が可換$(AB = BA)$ならば，次が成り立つ．
(i)　ある $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ があって，$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ かつ $B\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}$ $(\lambda, \mu \in \boldsymbol{C})$.
(ii)　ある行列 $P$ で $P^{-1}AP$，$P^{-1}BP$ を同時に(上)三角行列にできる．
(iii)　(ii)において，$P$ はユニタリ行列にとれる．

---

**注意**　(i)の $\boldsymbol{v}$ を $A$ と $B$ の**同時固有ベクトル**という．また(ii)の事実を，$A$ と $B$ が**同時三角化**可能という．「ほとんどの行列は対角化できる」(固有方程式が重根を持たなければ正しい)と思えば，補題は

「可換なら同時に対角化できる」

と読める．これはたとえば量子力学において，エネルギー $H$ が同じ複数の状態を $H$ と可換な物理量の値で分離する，などの原理にもなり，それ自身大事である．

---

**証明**　(i)　固有方程式 $|A-\lambda|=0$ は複素数の範囲で必ず解 $\lambda$ を持ち，$(A-\lambda)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ は解 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{C}^n$，$\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ をもつ．そのとき $AB=BA$ より

$$A(B\boldsymbol{v})=BA\boldsymbol{v}=B\lambda\boldsymbol{v}=\lambda(B\boldsymbol{v}). \tag{17}$$

つまり $\boldsymbol{v}$ が $A$ の固有ベクトルなら，$B\boldsymbol{v}$ も $A$ の同じ固有値の固有ベクトルである．これが鍵である．実際，$A$ の固有値 $\lambda$ の固有ベクトルが1次元とすれば，$B\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}$ より自動的に $B\boldsymbol{v}=\mu\boldsymbol{v}$ である．

一般にも，$A$ の固有空間(§13.3) $V(\lambda):=\{\boldsymbol{v}\mid A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}\}\subset\boldsymbol{C}^n$ の中で $B$ の固有ベクトルを探せばよい．(17)より $B$ は $V(\lambda)$ を $V(\lambda)$ にうつす．$V(\lambda)$ に基底 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_l$ $(l=\dim V(\lambda))$ をとり $B: V(\lambda)\to V(\lambda)$ を行列表示すると

$$B[\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_l]=[\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_l]B_\lambda \qquad (B_\lambda \text{ は } l \text{ 次正方行列}).$$

複素数の範囲で考えているので $B_\lambda$ は必ず固有ベクトルをもつ．$B_\lambda\boldsymbol{y}=\mu\boldsymbol{y}$ $(\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{C}^l,\ \boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0})$ とすれば，$\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_l]\boldsymbol{y}$ が求めるもの：

$$B\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_l]B_\lambda\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_l]\mu\boldsymbol{y}=\mu\boldsymbol{v}.$$

(ii)　(i)の $\boldsymbol{v}$ に $n-1$ 個のベクトルを補って $V$ の基底 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ を作れば，$A,B$ の作用は次のように表される．

$$A[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n]=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n]\begin{bmatrix}\lambda & *\\ \boldsymbol{0} & A'\end{bmatrix} \tag{18}$$

$$B[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n]=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n]\begin{bmatrix}\mu & *\\ \boldsymbol{0} & B'\end{bmatrix} \tag{19}$$

$A',B'$ は $n-1$ 次の正方行列で，$AB=BA$ より $A'B'=B'A'$ がわかる：これでサイズを1つ小さくできた．帰納法により，ある $P'$ で

$$P'^{-1}A'P'=A_1,\qquad P'^{-1}B'P'=B_1$$

は同時に上三角にできるとしてよい．そこで次の $P$ を考える．

$$P:=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n]\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & P'\end{bmatrix} \tag{20}$$

すると $AP=P\begin{bmatrix}\lambda & *\\ \boldsymbol{0} & P'^{-1}A'P'\end{bmatrix}\overset{(18)}{=}P\begin{bmatrix}\lambda & *\\ \boldsymbol{0} & A_1\end{bmatrix}$，また

$$BP=P\begin{bmatrix}\lambda & *\\ \boldsymbol{0} & P'^{-1}B'P'\end{bmatrix}\overset{(19)}{=}P\begin{bmatrix}\lambda & *\\ \boldsymbol{0} & B_1\end{bmatrix}.$$

$\{\boldsymbol{v}_i\}$ は基底で $P'$ は可逆ゆえ $P$ も可逆．$P^{-1}AP$，$P^{-1}BP$ は上三角である．

(iii) (ii)の $P$ を $P=[\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n]$ と書く．$\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n$ を正規直交化して $\boldsymbol{u}_1(:=\boldsymbol{w}_1/\|\boldsymbol{w}_1\|), \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ とすれば，上三角行列 $T$ があって

$$[\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n]=[\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n]\cdot T \qquad (\text{左辺を } U \text{ とすれば，} U=PT)$$

となる(岩澤分解，§10.4)．$U:=[\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n]$ は $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j)=\delta_{i,j}$ よりユニタリだが，この $U$ で $A, B$ がともに三角化される：すでに実行した同時三角化を $P^{-1}AP=\tilde{A}$，$P^{-1}BP=\tilde{B}$ とし，これを書き直せば

$$(UT^{-1})^{-1}A(UT^{-1})=\tilde{A}, \qquad (UT^{-1})^{-1}B(UT^{-1})=\tilde{B}$$

$$\therefore \quad U^{-1}AU=T^{-1}\tilde{A}T, \qquad U^{-1}BU=T^{-1}\tilde{B}T.$$

右辺はともに上三角行列の積だから，上三角である． □

**テープリッツの定理の証明** 補題を $B=A^*$ と考えて使うと，同時に

$$U^*AU=\begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ O & \text{あ} & * \end{bmatrix}, \qquad U^*A^*U=\begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ O & \text{い} & * \end{bmatrix}$$

$(U^*=U^{-1})$ となる．㋐$^*=(U^{-1}AU)^*=U^{-1}A^*U=$㋑ だが，㋐$^*$ は下三角．よって㋐，㋑ はともに対角行列である． □

**例8** 例6の $A$ について，$|A-\lambda|=-\lambda^3+\sqrt{3}\,i\lambda^2+3\lambda-3\sqrt{3}\,i=0$ の解は $\lambda=\sqrt{3}\,i, \pm\sqrt{3}$．固有ベクトルは次の通り(直交している)．

$$\boldsymbol{v}_{\sqrt{3}\,i}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_{\pm\sqrt{3}}=\begin{bmatrix} 1\pm\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{u}_\lambda=\boldsymbol{v}_\lambda/\|\boldsymbol{v}_\lambda\|$ と正規化すれば，$P=[\boldsymbol{u}_{\sqrt{3}\,i}, \boldsymbol{u}_{\sqrt{3}}, \boldsymbol{u}_{-\sqrt{3}}]$ はユニタリとなり

$$P^*AP=\sqrt{3}\begin{bmatrix} i & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}.$$

□

**問** $Q=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$ を $aE+bB+cC+dD$ と表すことにする．

(i) $B, C, D$ が互いに可換であることを示せ．

(ii) $B, C, D$ を同時対角化する実直交行列 $X$ を与えよ．

(iii)　(ii)を用いて $|Q|$ を因数分解せよ．

(iv)　(iii)を用いて 4 次方程式の解法を 3 次方程式に帰着させよ．

## 15.4　実正規行列の標準形

定理 34 により，実正規行列 $A$ ($A^tA = {}^tAA$ である実行列)もユニタリ行列 $U$ で対角化される．$U$ を実直交行列に限ったらどうだろうか．

$A$ の固有方程式の係数は実数だから，$\lambda$ が解ならその複素共役 $\bar{\lambda}$ も解である．これらを次のように並べよう．

$$\lambda_1,\ \overline{\lambda_1},\ \cdots,\ \lambda_k,\ \overline{\lambda_k}\ ;\ \lambda_{2k+1},\ \cdots,\ \lambda_n \tag{21}$$

複素共役な解 $k$ 組の後に実の解 $n-2k$ 個を書いた．対角化を与える $U$ は固有ベクトルからなる正規直交基底を並べたものだが，これも

$$U = [\boldsymbol{u}_1, \overline{\boldsymbol{u}_1}, \cdots, \boldsymbol{u}_k, \overline{\boldsymbol{u}_k}, \boldsymbol{u}_{2k+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n]$$

$$(A\boldsymbol{u}_j = \lambda_j\boldsymbol{u}_j,\ \ A\overline{\boldsymbol{u}_j} = \overline{\lambda_j}\,\overline{\boldsymbol{u}_j}\ ;\ \boldsymbol{u}_{2k+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n \text{ は実ベクトル})$$

としてよい：$\boldsymbol{u}_j$ の各成分の共役をとったのが $\overline{\boldsymbol{u}_j}$ である．

---

実際 $A\boldsymbol{v}_\lambda = \lambda\boldsymbol{v}_\lambda$ のとき，$\bar{A} = A$ より $A\overline{\boldsymbol{v}_\lambda} = \overline{A\boldsymbol{v}_\lambda} = \overline{\lambda\boldsymbol{v}_\lambda} = \bar{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{v}_\lambda}$．そこでまず $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ に対応して互いに正規直交な固有ベクトルをとって $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_k$ とし，$\overline{\lambda_1}, \cdots, \overline{\lambda_k}$ に対してはその複素共役ベクトルをとればよい．(異なる固有値の固有ベクトルは互いに直交するから，重複度をもつ固有値 $\lambda_i$ に対して重複度だけの個数の正規直交な固有ベクトルを選べば，あとは自動的に 1 次独立となる．) 残った実固有値に対しては，固有ベクトルは $(A-\lambda)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解として実にとれる．

---

もちろん

$$\boldsymbol{x}_j = \frac{\boldsymbol{u}_j + \overline{\boldsymbol{u}_j}}{\sqrt{2}},\qquad \boldsymbol{y}_j = \frac{\boldsymbol{u}_j - \overline{\boldsymbol{u}_j}}{i\sqrt{2}}\qquad (j = 1, \cdots, k)$$

は実ベクトルで $(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_l) = \dfrac{1}{2}\left\{(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_l) + (\overline{\boldsymbol{u}_j}, \overline{\boldsymbol{u}_l})\right\} = \delta_{jl}$．同様に $(\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{y}_l) = \delta_{j,l}$，$(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_l) = 0$ だから

$$T := [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k\ ;\ \boldsymbol{u}_{2k+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n]$$

は実直交行列である．$\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j$ への $A$ の作用も(例 4 の行列 $C = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$ で $[\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j] = [\boldsymbol{u}_j, \overline{\boldsymbol{u}_j}]C$ と書けることを使うと)

$$A[\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j] = A[\boldsymbol{u}_j, \overline{\boldsymbol{u}_j}]C = [\boldsymbol{u}_j, \overline{\boldsymbol{u}_j}]\begin{bmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_j} \end{bmatrix}C$$

$$= [\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j] C^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_j} \end{bmatrix} C = [\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j] \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}$$

($\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\alpha_j, \beta_j$ は実数)となる．まとめれば

**定理 35** 実正規行列 $A$ を，実直交行列 $T$ (${}^tT = T^{-1}$) で

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} & & O & \cdots & O \\ O & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \begin{bmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ -\beta_k & \alpha_k \end{bmatrix} & & O \\ O & \cdots & O & & \begin{bmatrix} \lambda_{2k+1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{22}$$

とできる(**実正規行列の標準形**)．

ここで $A$ が実対称行列なら(もともと(21)はすべて実数だから $\beta_j = 0$ で)，右辺は対角行列である．また $A$ が実直交行列なら((21)は絶対値1だから) $\alpha_j^2 + \beta_j^2 = 1$ かつ $\lambda_{2k+1}, \cdots, \lambda_n = \pm 1$ である． □

**問** 正規行列であることを確かめ，直交行列で標準化せよ．

(i) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

## 15.5 実2次形式と2次曲面の概形

2変数の2次形式を第1部(5章)で扱った：

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = [x, y] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{23}$$

一般に $n$ 次実対称行列 $B = {}^tB = [b_{ij}]$ により

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_B := {}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{y} \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n) \tag{24}$$

とおき，$Q_B(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})_B = {}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x}$ を $B$ の定める実2次形式とよぶ．エルミート形式(9)と同様で内積の性質のうち正値性($\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow Q_B(\boldsymbol{x}) > 0$)が保証されない．$Q_B$ が正値のとき，$B$ も正値とよぶ．

(24)は $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_B = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})_B$ をみたし，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 両方について線型(双線型)である．$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_B = \frac{1}{2}((\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})_B - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_B - (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})_B)$ だから，$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_B$ は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ のときから復元できる(エルミート形式のときも同様)．$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_B$ を $B$ が定める**実対称双線型形式**とよぶが，ここでは同じものとみなそう．

直交行列 $T$ で $T^{-1}BT = \Lambda$ を対角行列にすれば，$\Lambda$ の対角成分 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は実である(定理 35)．(14)と同様，$T^{-1}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} = {}^t[x_1, \cdots, x_n]$ とすれば

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_B &= {}^t\boldsymbol{v}B\boldsymbol{v} = {}^t(T\boldsymbol{x})B(T\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}(T^{-1}BT)\boldsymbol{x} \\ &= {}^t\boldsymbol{x}\Lambda\boldsymbol{x} = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2. \end{aligned} \tag{25}$$

これが実 2 次形式 $Q_B$ の**標準形**である．$X_j := x_j\sqrt{|\lambda_j|}$ と座標変換し，適当に添字をつけかえれば

$$(25) = X_1^2 + \cdots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \cdots - X_{p+q}^2 \tag{26}$$

であり，やはり $(p, q)$ を $Q_B$ の**符号数**という．相対性理論には符号数 $(3, 1)$ のものが登場する．

平面の 2 次曲線と同様，ユークリッド空間における 2 次曲面が符号数を用いて分類される．$\boldsymbol{R}^3$ の曲面

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx = K \tag{27}$$

$(a, b, \cdots, f, K$ は実定数)を考えよう．左辺は

$$Q_B(x, y, z) = {}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x} \tag{28}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{bmatrix} \tag{29}$$

と書け，直交行列による変数変換($B$ の対角化)で

$$Q_B(x, y, z) = \lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 = K \tag{30}$$

とできる((25)式)．$\lambda, \mu, \nu \neq 0$ とすれば

(イ)　これら 3 つが同符号 $(\lambda, \mu, \nu > 0$ とする)

(ロ)　2 つが同符号 $(\lambda, \mu > 0,\ \nu < 0$ とする)

のいずれか．したがって(27)は図 2(次ページ)の形である．

多変数関数の極値問題では，$Q_B$ が正値かどうか((イ)の場合であるか)を判定することが必要になる．(23)のときも直交行列による計算は大変で，

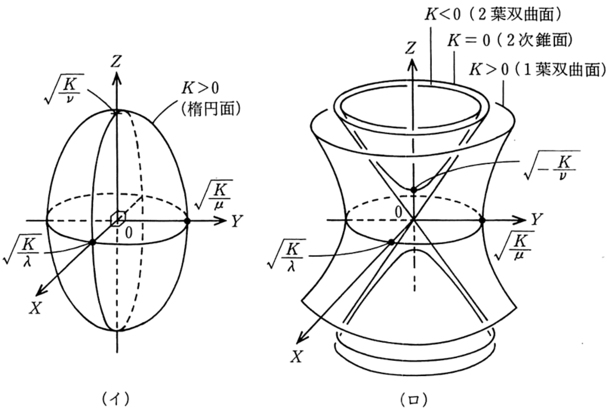



**図2**　2次曲面(27)(⇔(30))の概形

$$a>0,\qquad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}>0 \tag{31}$$

によるのが便利だった．これを一般化しよう．

やはり(29)で考える．$z=0$ の場合として2変数のときの(31)にあたる条件が，また(30)より $|B|=\lambda\mu\nu>0$ が必要．つまり3つの**主小行列式**が正でなくてはならない：

$$a>0,\qquad \Delta_2:=\begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix}>0,\qquad |B|>0. \tag{32}$$

逆にこれは十分条件になる．まず $a>0$ より

$$Q_B=a\left(x+\frac{d}{a}y+\frac{f}{a}z\right)^2-\left(\frac{d^2}{a}y^2+\frac{f^2}{a}z^2+2\frac{df}{a}yz\right)$$
$$+by^2+cz^2+2eyz$$

と変形できる．さらに平方完成して

$$Q_B=a\left(x+\frac{d}{a}y+\frac{f}{a}z\right)^2$$
$$+\frac{ab-d^2}{a}\left\{\left(y+\frac{ae-df}{ab-d^2}z\right)^2-\left(\frac{ae-df}{ab-d^2}z\right)^2\right\}+\left(c-\frac{f^2}{a}\right)z^2,$$

やはり $ab-d^2=\Delta_2>0$ より変形が許される．結局

$$Q_B(x,y,z)=ax'^2+b'y'^2+c'z'^2, \tag{33}$$

ただし $b' = \dfrac{ab-d^2}{a}$, $c' = c - \dfrac{f^2}{a} - \dfrac{(ae-df)^2}{a(ab-d^2)}$,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & d/a & f/a \\ 0 & 1 & (ae-df)/\Delta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{34}$$

である．つまり，右辺の上三角行列を $P$ とすれば

$$\begin{bmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{bmatrix} = {}^tP \begin{bmatrix} a & & O \\ & b' & \\ O & & c' \end{bmatrix} P. \tag{35}$$

(33)が正値のためには $b', c' > 0$ ならよいが，$b' = \Delta_2/a$, $ab'c' = |B|$ ($\because$ (35))だからこれらは正である．よって3次の実対称行列 $B$ に対し

**定理 36**　$B$ が正値 $\Longleftrightarrow$ $B$ の主小行列式がすべて正.

帰納法により，$n$ 次実対称行列 $B$ の正値性も，$n$ 個の主小行列式 $\Delta_m := \det[b_{ij}]_{i,j \leqq m}$ $(m = 1, \cdots, n)$ を用いて上の判定法を適用できる．また正値でない場合も，上のような変形で符号数を判定してよい：

**定理 37（シルベスターの慣性法則）**　2次形式 $Q_B$ の標準形(26)における符号数は，変数変換が可逆な1次変換であるかぎり一定である．

**証明**　変数が増えても同様なので，2変数で考える．$Q_B(x, y)$ を

$$Q_B(x, y) = \lambda_1 x_1^2 + \mu_1 y_1^2 = \lambda_2 x_2^2 + \mu_2 y_2^2 \tag{36}$$

と二通りに変数変換したとしよう．もちろん $x_i, y_i$ は $x, y$ の斉次1次式 $(i = 1, 2)$，つまり可逆な実2次行列 $P_1, P_2$ で

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = P_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \left( {}^tP_iBP_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \mu_i \end{bmatrix} \right)$$

とする．0でない係数 $\lambda_i, \mu_i$ の数は $B$ の階数に等しく $i$ によらない．$\lambda_i \geqq \mu_i$ としてよいから，簡単のため $\lambda_i, \mu_i \neq 0$ とすれば$(\lambda_i, \mu_i)$の符号は(正, 正), (正, 負), (負, 負)のいずれか．たとえば$(\lambda_1, \mu_1)$が(正, 正)なのに$(\lambda_2, \mu_2)$は(正, 負)だとしよう．すると $x_2 = 0$, $y_2 \neq 0$ のとき

$$\lambda_1 x_1^2 + \mu_1 y_1^2 = \mu_2 y_2^2$$

の右辺は負，左辺≧0：これは矛盾．「たとえば」が他のパターンになっても同様である．（$n$ 変数の場合については，練習問題 15-3 を参照．） □

**問** （i） 正定値の場合にならって，$B$ が負定値であるための必要十分条件を $B$ の主小行列式 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ の符号を用いて述べよ．

（ii） 次の 2 次形式の符号を答えよ．

ア） $4x^2+2y^2+3z^2-4xy+4xz-4yz$

イ） $xy+yz+zx$

ウ） $4xy-4xw+4zw$

エ） $y^2+2z^2-2xy-2xz+4yz-2yw-2zw$

（iii） イの 2 次形式が定める $\boldsymbol{R}^3$ の図形 $xy+yz+zx=1$ を描け．

---

実数直線 $\boldsymbol{R}$ における整数全体 $\boldsymbol{Z}$ のように，$\boldsymbol{R}^n$ においてある基底の下で座標が整数の点全体を考え，これをひとつの**格子**という．格子の上でつねに整数値をとる内積の分類は，今回扱った連続的な変数変換を許す場合(たとえば(25)から(26)への変換で，$\sqrt{\lambda_j}$ は実数でよかった)と異なり，次元 $n$ の個性が現れ奥が深い．たとえば 8 の倍数次元では，原点に最も近い点の数が異常に多い格子が存在し，単位球の密度の高い配置(つめこみ)を定める[3]．これは整数論から弦理論にいたる，**ムーンシャイン**と総称される現象の一端である．

---

## 道案内

1）　とくに $n=2$ のとき，2次のユニタリ行列は7次元球面上にある．さらに「行列式1」の条件をつけると，そのような行列は $A=\begin{bmatrix}\alpha & -\bar{\beta}\\ \beta & \bar{\alpha}\end{bmatrix}$（$\alpha, \beta$ は複素数で $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$）と表される．つまり $SU(2)=\{A\in M_{2,2}(\boldsymbol{C})\,|\,AA^*=E,\ |A|=1\}$ は（$|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ できまる）3次元球面 $S^3$ と一致する．

2）　正規行列は一般にエルミート行列とユニタリ行列の積で表せ（例6では，$A=\sqrt{3}E\cdot U$），これを複素数との類似から**極表示**という．正規行列はこの意味で複素数そのものの類似と考えられる．

3）　$n=8$ で240個，$n=24$ で196560個など：

鈴木通夫『有限単純群』紀伊國屋書店(1987)

原田耕一郎『モンスター』岩波書店(1999)

I. B. Frenkel 他 "*Vertex operators and the Monster*"（とくに序），*Academic Press* (1988)

などを参照のこと．

## 練習問題

**15-1**　正規行列であることを確かめ，ユニタリ行列で対角化せよ．

(i)　$A=\begin{bmatrix}3 & i & -2\\ -i & 0 & -i\\ -2 & i & 3\end{bmatrix}$　　(ii)　$B=\begin{bmatrix}1+7i & -2 & 2i\\ 2 & 1+4i & 1\\ 2i & -1 & 1+4i\end{bmatrix}$

**15-2**　以下を示せ．

(i)　$a_i, b_i>0$，$A:=\begin{bmatrix}a_1+b_1 & -b_1 & 0\\ -b_1 & b_1+a_2+b_2 & -b_2\\ 0 & -b_2 & b_2+a_3\end{bmatrix}$ とし，$x, y\in\boldsymbol{R}^3$ に対し $(x, y)_A:={}^t xAy$ とおくと，$(\ ,\ )_A$ は正定値である．［ヒント：(34)式］

(ii)　$A$ が正値実対称行列 ⇔ 上三角行列 $L$ があり，$A={}^tLL$．［ヒント：(i)］

(iii)　正値実対称行列 $A=[a_{ij}]$ は，$|A|\leqq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ をみたす．［ヒント：(ii)］

(iv)　$H$ が正値エルミート行列ならば $E-iH$ は可逆であり，$(E-iH)^{-1}(E+iH)$ はユニタリ行列となる．

(v)　$P$ が $n$ 次エルミート行列で $P^2=P$ ならば，$\boldsymbol{C}^n=\mathrm{Im}\,P\oplus\mathrm{Ker}\,P$ であり，この分解は直交直和となる．

**15-3**　対称行列 $A\in M_{n,n}(\boldsymbol{R})$ を可逆な $P, P'$ で変形し，次を得たとする．

あ）　${}^tPAP=\mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_p, b_1, \cdots, b_q, 0, \cdots, 0)$　　$(a_i>0,\ b_i<0)$，

い)　${}^tP'AP' = \mathrm{diag}(a'_1, \cdots, a'_{p'}, b'_1, \cdots, b'_{q'}, 0, \cdots, 0)$　　$(a'_i > 0,\ \ b'_i < 0)$.

（i）　$p+q = p'+q'$ を示せ.

（ii）　あ)の表示から $p$ 次元，い)の表示から $n-p'$ 次元の空間を，その中の $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ に対する値 ${}^t\boldsymbol{v}A\boldsymbol{v}$ が前者では正，後者では0以下となるようにとれ.

（iii）　$p = p'$ を示せ．これで慣性法則(定理37)が一般に示された.

**15-4**　3次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ において，次の2次曲面の概形を描け.

（i）　$x^2+y^2+z^2+2xz+2yz = 0$

（ii）　$xy+yz+zx = 1$

（iii）　$3x^2+2y^2+3z^2-2xy-2yz = 6$

（iv）　$x^2+z^2+2xy+2yz-4zx = 6$

**15-5**　（i）　$x$ の1変数多項式 $f(x)$，$g(x)$ の内積を $(f, g) := \int_0^\infty \overline{f(x)}\, g(x)\, e^{-x} dx$ で定める．$(x^m, x^n) = (m+n)!$ を示せ.

（ii）　(i) の内積に関し，単項式の列 $\{1, x, x^2, x^3, \cdots\}$ からシュミットの正規直交化を施し順次得られる多項式 $f_0, f_1, f_2, f_3, \cdots$ ($f_k$ は $k$ 次式，$x^k$ の係数は正の実数とする) を $f_3$ まで求めよ．$f_k$ は**ラゲールの多項式**とよばれる.

**15-6**　$A$は $n$ 次正値実対称行列で，固有値は重複がなく $\lambda_1 > \cdots > \lambda_n > 0$ とする.

（i）　最大固有値 $\lambda_1$ は $\lambda_1 = \max_{|\boldsymbol{x}|=1}(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})$ で与えられることを示せ．また $\lambda_1$ に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1$ とすれば，$\lambda_2 = \max_{|\boldsymbol{x}|=1,\, \boldsymbol{x}\perp \boldsymbol{v}_1}(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})$ であることを示せ．ここで $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$.

（ii）　$A$ の第 $n$ 行と第 $n$ 列を除いた行列を $A'$ とする．$A'$ の最小固有値 $\lambda$ が $\lambda_n \leqq \lambda \leqq \lambda_{n-1}$ をみたすことを示せ．［ヒント：図形$(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})=1$ を考えよ.］

**15-7**　平面 $\boldsymbol{R}^2$ の $n$ 個の点 $\mathrm{P}(x_i, y_i)\,(i = 1, \cdots, n)$ があるとき，直線 $y = ax+b$ を $f(a, b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$ が最小となるよう選ぼう(**最小二乗法**).

（i）　$a, b$ は次の方程式を満たすことを示せ：$X{}^tX\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = X\boldsymbol{y}$．ただし $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{y} = {}^t[y_1, \cdots, y_n]$ である.

（ii）　(i)の方程式は，$x_1, \cdots, x_n$ が相異なればただ1組の解 $(a, b)$ をもつことを示せ．この直線 $y = ax+b$ を**回帰直線**とよぶ.

# 16章：行列のなす群

前章で2次曲面を調べたときのように，いろいろな変換を行ってものごとを簡単にできることは多い．どんな変換を用いるかは，ものの見方そのものにも関わる．そこで「変換の全体」について考えておこう．視覚で納得するため，数の範囲はおもに実数とする．

## 16.1 斉次でない2次式とアフィン変換

斉次でない，つまり1次式を含む2次式の定める曲面

$$S : ax^2+by^2+cz^2+2(dxy+eyz+fzx+px+qy+rz)=K \quad (1)$$

を考えよう．行列とベクトルを使って書くため

$$A=\begin{bmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p}=\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$(A={}^tA)$ とおき，$Q_A(\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ とすれば

$$(1) \Longleftrightarrow Q_A(x)+2\,{}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}=K. \quad (2)$$

$A$ を直交行列で対角化すれば，$d=e=f=0$ としてよい(定理35)．$|A|=abc\neq 0$ と仮定すれば，平方完成により

$$(1) \Longleftrightarrow a\left(x+\frac{p}{a}\right)^2+b\left(y+\frac{q}{b}\right)^2+c\left(z+\frac{r}{c}\right)^2=K'$$

$$\left(K'=K+\frac{p^2}{a}+\frac{q^2}{b}+\frac{r^2}{c}\right). \quad (3)$$

つまり $-{}^t\left[\frac{p}{a}, \frac{q}{b}, \frac{r}{c}\right]$ だけ平行移動すれば前章の形になる(§15.5(30))．

---

$|A|=0$ のときも，rank $A=2$ なら（$c=0$ としてよい）

$$a\left(x+\frac{p}{a}\right)^2+b\left(y+\frac{q}{b}\right)^2+2rz=K'$$

にできる．また rank $A=1$ なら（$b=c=0$ としてよい）次の形にできる：

$$a\left(x+\frac{p}{a}\right)^2+2qy+2rz=K'.$$

---

このような平方完成は $A$ を対角化しなくても可能である．

$$Q_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})=Q_A(\boldsymbol{x})+2\,{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{a}+{}^t\boldsymbol{a}A\boldsymbol{a}$$

に注意する．簡単のため $A^{-1}$ があるとすれば，$\boldsymbol{a}=A^{-1}\boldsymbol{p}$ により

$$(1) \iff Q_A(\boldsymbol{x}+A^{-1}\boldsymbol{p}) = K + {}^t\boldsymbol{p}A^{-1}\boldsymbol{p}. \tag{4}$$

**定義 25** 線型写像 $(A \in M_{m,n}(\boldsymbol{R}))$ に定数項 $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^m$ がついた形の写像

$$f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m, \qquad f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p} \tag{5}$$

を**アフィン写像**という．$n = m$ ならアフィン変換ともいう[1)]． □

(4)に現れた $\boldsymbol{R}^3$ の平行移動 $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}$ ((4)では $\boldsymbol{a} = A^{-1}\boldsymbol{p}$)は代表的なアフィン写像である．もちろん線型写像も，定数項のない特別なアフィン写像である．

アフィン写像も行列で扱える．成分を1つ増やして，(5)を

$$\begin{bmatrix} A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & p_1 \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & p_m \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\left( \begin{bmatrix} f(x) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix} \text{と書こう} \right) \tag{7}$$

と表せばよい．この意味を $m = n = 2$ で考えてみると，(6)の表示は $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ を $\boldsymbol{R}^3$ の高さ1の点 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ と見るものである．つまり $\boldsymbol{R}^2$ のアフィン変換は $\boldsymbol{R}^3$ の1次変換を高さ1の平面に制限して表せる．

**例1** $f : \boldsymbol{R}^1 \to \boldsymbol{R}^1$, $f(x) = ax+b$ を(6)の形に書けば

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+b \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**例2** $\boldsymbol{R}^3$ の直線や平面のパラメータ表示(7章)も，それぞれ $\boldsymbol{R}^1 \to \boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ というアフィン写像である．平面 $\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3$ は方向ベクトル，$\boldsymbol{c}$ は定点)の場合，次のように表示できる：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**例3** 原点と異なる点 $\mathrm{Q} \neq \mathrm{O}$ を中心とする回転 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ はアフィン変換である：$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boldsymbol{q}$ とすれば，原点を中心とする回転の行列 $T$ (実直

交行列で「向き」を変えないもの：$T\,{}^tT = E,\ |T| = 1$)があって，$f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{q}) = T\boldsymbol{v}+\boldsymbol{q}$. つまり $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{q}$ とすれば $f(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q})+\boldsymbol{q}$.

$$\therefore\quad \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{x}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & \boldsymbol{q} \\ {}^t\boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}-\boldsymbol{q} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underset{\text{は}}{\begin{bmatrix} E & \boldsymbol{q} \\ {}^t\boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}}\underset{\text{ろ}}{\begin{bmatrix} T & \boldsymbol{0} \\ {}^t\boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}}\underset{\text{い}}{\begin{bmatrix} E & -\boldsymbol{q} \\ {}^t\boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

結局 $f$ は次の合成写像として得られる：

㋑ まず $-\boldsymbol{q}$ だけ平行移動し，

㋺ 次に原点中心の回転 $T$ を施し，

㋩ 最後に $\boldsymbol{q}$ だけ平行移動する．　□

以上の例にならって，(1)を書き直せば

$$[x, y, z, 1]\begin{bmatrix} a & d & f & p \\ d & b & e & q \\ f & e & c & r \\ p & q & r & -K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{9}$$

あるいは $[{}^t\boldsymbol{x}, 1]\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{p} \\ {}^t\boldsymbol{p} & -K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ と書ける．

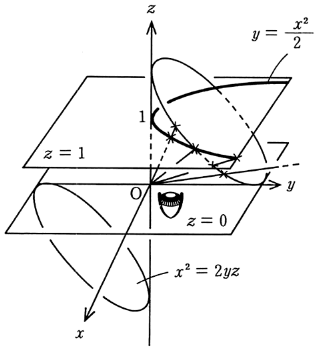
**問**　(i)　$\boldsymbol{R}^3$ の 2 次曲面 $x^2-2xy+y^2+x-2y+z = c$ はどのような曲面か．適当な変換を用いて調べよ．

(ii)　$\boldsymbol{R}^3$ において必ずしも原点を中心としない 2 つの回転 $f_1, f_2$ の合成 $f_1 \circ f_2$ が，やはり適当な点を中心とする回転であることを示せ．

## 16.2　射影変換

(9)の 4 次行列はそれ自身対称だから，4 次直交行列 $T$ で対角化できる．しかしその際，$\boldsymbol{x} = {}^t[x, y, z, 1] \mapsto T\boldsymbol{x}$ によって第 4 成分が 1 のままとは限らない．4 次元は絵に書けないので，次元を 1 つ下げてこの変換の意味を考えよう．次の 2 次曲線で考える(図 1(ア))．

$$y = \frac{x^2}{2} \Longleftrightarrow [x, y, z]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \tag{10}$$




（ア）　$\theta=0$

**図1**　地平線 $z=0$ は目の前の「画用紙」$z=1$ の視界に入らない(**無限遠直線**)が，新たな画用紙 $z_\theta=1$ の視界では直線を描く．放物線(ア)だった断面は双曲線(イ) ($0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$)，あるいは楕円(ウ) ($\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$)に変化する．(イ)，(ウ)で見ると，放物線(ア)は地平線に接していることがわかる．

ただし $z=1$．右の式は，$z$ を一般にすれば原点を通る円錐 $x^2=2yz=\frac{1}{2}((y+z)^2-(y-z)^2)$ を表し，その $z=1$ による断面が今考える曲線(放物線)である．逆に原点に目をおくと方向が同じ2点 $(x,y,z)$, $\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1\right)$ は区別できないから($z\neq 0$ とする)[2)]，$z=1$ 上の放物線 $y=\frac{x^2}{2}$ が $\frac{y}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{z}\right)^2$ として(10)の円錐を定める．このように1つの視線(原点を通る直線)上の点を(原点を除き)すべて同じ点とみなすのは**射影幾何**の立場である．さて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=X_\theta\begin{bmatrix} x \\ y_\theta \\ z_\theta \end{bmatrix},\qquad X_\theta=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{11}$$

と $x$ 軸を中心に回転すれば，簡単な計算で

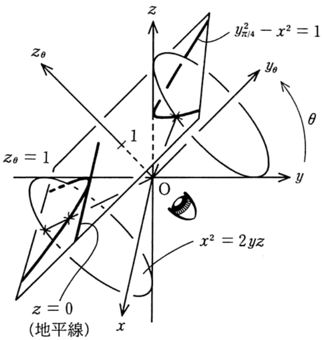
$$(10)\iff [x,y_\theta,z_\theta]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y_\theta \\ z_\theta \end{bmatrix}=0$$

$$\iff x^2=(y_\theta^2-z_\theta^2)\sin 2\theta+2y_\theta z_\theta\cos 2\theta. \tag{12}$$

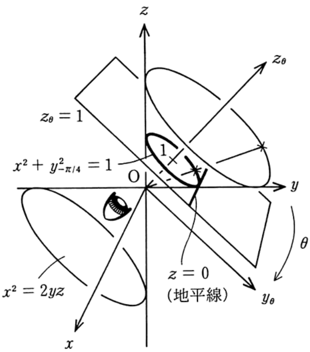
新たな平面 $z_\theta=1$ で断面を考えると $x^2=(y_\theta^2-1)\sin 2\theta+2y_\theta\cos 2\theta$．これは $\theta\neq 0,\pi$ なら双曲線または楕円で，たとえば $\theta=\pm\frac{\pi}{4}$ なら

$$x^2=y_{\pi/4}^2-1,\qquad x^2=-y_{-\pi/4}^2-1 \tag{13}$$

である(図1(イ)，(ウ))．




（イ） $\theta = \frac{\pi}{4}$




（ウ） $\theta = -\frac{\pi}{4}$

一般に点$(x, y, z)$を原点からの方向が同じである「高さ」1の点にうつすには，$x, y$ を $z$ 座標で割ればよい：

$$(x, y, z) \longmapsto (x/z, y/z, 1) \qquad (z \neq 0 \text{ としよう}).$$

(11)の場合，$x/z, y/z$ を $x, y_\theta, z_\theta$ で書くと

$$\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = \left(\frac{x}{\sin\theta\, y_\theta + \cos\theta\, z_\theta}, \frac{\cos\theta\, y_\theta - \sin\theta\, z_\theta}{\sin\theta\, y_\theta + \cos\theta\, z_\theta}\right)$$

である．(10)から(12)を出す計算も，これを直接$(x/z)^2 = 2(y/z)$ に代入すればよい．(11)は図形を止めて平面を動かしたが，平面 $z = 1$ を止めて考えれば，可逆な1次変換

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{14}$$

は次の**射影変換**(1次分数変換)を定める(図2，次ページ)．

$$\begin{aligned}(x, y, 1) &\mapsto (x_A/z_A, y_A/z_A, 1) \\ &= \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3}, \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3}, 1\right)\end{aligned} \tag{15}$$

$A$ は原点$(0, 0, 0)$を通る直線をやはり原点を通る直線にうつす．(15)はこれを第3成分が1の方向ベクトル，あるいは，高さが1の面で見るものである．ただし分母 $z_A$ が0なら，変換の結果が無限遠点になることを意

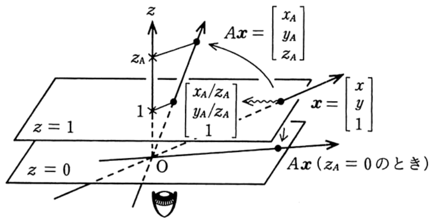



**図2**　$A$ が定める射影変換(15)．$z_A = 0$ のとき，
$Ax$ は地平線(無限遠直線)上の1点を定める．

味する．0にならないためには $a_3 = b_3 = 0$ が必要十分で，このとき(14)はアフィン変換を定める．この条件を課さない一般の射影変換では，放物線・楕円・双曲線は互いにうつりあう．

**問**　(i)　射影変換(15)では直線が直線にうつることを示せ．

(ii)　さらに成分を減らし，2次行列による1次分数変換を考える．$\mathbf{0}$ でない $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ が定める方向(原点を通る直線上の点)をすべて同じ点と見なす．この方向は比 $z = \dfrac{x}{y}$ できまる($y$ 軸を表す $y = 0$ のときは，本文の無限遠直線にならって『無限遠点』$\infty$ と考える．$\dfrac{1}{0}$ も $\dfrac{-1}{0}$ も $y$ 軸を表すから，$\infty = -\infty$ と考える)．$\boldsymbol{v}$ への行列の作用を比 $z$ の方で見ると

$$A(z) = \frac{ax+by}{cx+dy} = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \left(A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{のとき}\right)$$

である．この作用について $A(B(z)) = (AB)(z)$ が成り立つことを示せ．

## 16.3　行列のなす群と幾何学

「変換の全体」を公理化したのが，次の定義である．

**定義26**　集合 $G$ に，性質(16), (17), (18)をみたす演算が定義されているとき，$G$ を群(ぐん)(group)という．

(i)　任意の $g, h \in G$ に対し演算($\circ$としよう)の結果(「積」) $g \circ h$ が $G$ の元として定まり，次の結合法則が成り立つ．

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \tag{16}$$

(ii) 単位元とよばれる特別な元 $e \in G$ が存在して，次をみたす：

$$e \circ g = g \circ e = g \qquad (\text{任意の } g \in G \text{ に対して}) \tag{17}$$

(iii) 任意の $g \in G$ には，逆元 $g^{-1}$ が存在する：

$$g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e. \tag{18}$$

**例 4** 整数全体 $\boldsymbol{Z}$ は，和 $(m, n) \mapsto m+n$ によって群をなす：単位元は 0，$n$ の逆元は $-n$．ただし，積 $(m, n) \mapsto m \cdot n$ について $\boldsymbol{Z}$ は群でない（逆元が整数の範囲でとれない，「逆について閉じていない」から）．ベクトル空間も（もちろん $\boldsymbol{R}$ や $\boldsymbol{C}$ も），和に注目すれば 1 つの群である．

**例 5** 同じ集合 $X$ から $X$ への 2 つの写像 $f, g$ に対し，合成 $f \circ g$ が写像 $X \to X$ として定義され，3 つの写像 $f, g, h$ の合成は(16)をみたす．恒等写像 $id : x \mapsto x$ $(id(x) = x)$ が(17)をみたし，$f$ の逆写像 $f^{-1}$ があれば(18)をみたす．よって逆写像をもつ写像（1 対 1 対応）$f : X \to X$ の全体（$\mathrm{Aut}(X)$ と書く，Aut＝automorphism「自己同型」）は群をなす．

$X = \{1, \cdots, n\}$ なら，$X$ から $X$ への 1 対 1 対応とは $n$ 文字の置換にほかならず，行列式を定める際（11 章）に現れた．$n$ 文字の置換全体がなす群を $n$ 次**対称群**(symmetric group)といい，$\mathfrak{S}_n$（ドイツ文字の S）で表す．

**例 6** 体 $\boldsymbol{K}\,(= \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$ ごとに次の群がある．

$$GL_n(\boldsymbol{K}) := \{A \in M_{n,n}(\boldsymbol{K}) \mid |A| \neq 0\} \tag{19}$$

$$SL_n(\boldsymbol{K}) := \{A \in M_{n,n}(\boldsymbol{K}) \mid |A| = 1\} \tag{20}$$

それぞれ（$n$ 次の）**一般線型群**，**特殊線型群**(general linear group, special linear group)という．ともに積と逆元（逆行列）で閉じており，たしかに群である：$|A|, |B| \neq 0 (= 1) \Rightarrow |A^{-1}|, |AB| \neq 0 (= 1)$．

**例 7** 内積を保つ写像 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$，$(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は，直交行列 $T$ で $f(\boldsymbol{x}) = T\boldsymbol{x}$ と書ける（練習問題 16-2）．

$$O(n) := \{T \in M_{n,n}(\boldsymbol{R}) \mid {}^tTT = E\} \tag{21}$$

を $n$ 次の（実）**直交群**(orthogonal group)とよぶ．$T, T'$ が内積を保てば $T^{-1}$ も $TT'$ も保つから $O(n)$ は群である．

$O(n)$ の元で向きを変えないもの全体を $n$ 次の（実）**特殊直交群**または回転群といい，$SO(n)$ と書く．「向きを保つ」を表す条件 $|T| > 0$ は，

($^tTT=E$ より $|T|^2=1$ なので) $|T|=1$ と同値となる：

$$SO(n)=\{T\in M_{n,n}(\boldsymbol{R})\mid {}^tTT=E,\ |T|=1\}. \tag{22}$$

たとえば $n=2$ なら，$SO(2)$ の元 $T$ は正規直交する列ベクトルが $|T|=1$ のように並んだ行列であるから

$$T=R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{23}$$

の形である．$R_\theta$ は平面の回転を表し，群の積は回転角 $\theta$ の和で与えられる：$R_\theta R_\varphi=R_{\theta+\varphi}$，$R_\theta^{-1}=R_{-\theta}$.

**例 8**　$\boldsymbol{R}^n$ のアフィン変換(5)の合成はアフィン変換である：

$$A_2(A_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_1)+\boldsymbol{b}_2=(A_2A_1)\boldsymbol{x}+(A_2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2).$$

$A_1$ が可逆なら $\boldsymbol{x}\mapsto A_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_1$ は可逆である($A_2=A_1^{-1}$, $\boldsymbol{b}_2=-A_1^{-1}\boldsymbol{b}_1$ を考えよ)：その全体をここでは $A(n)$ と書き，**アフィン変換群**とよぼう．とくに，$\boldsymbol{R}^n$ の任意の2点間の距離を変えないアフィン変換の全体を**合同変換群**(ユークリッド変換群)という．ここでは $E(n)$ と書こう．(8)のように行列で表示すれば

$$E(n)=\left\{\begin{bmatrix}T & \boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}\,\middle|\,{}^tTT=E,\ \boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n\right\}.$$

$\boldsymbol{R}^2$ の2つの図形が合同とは，$E(n)$ の元でうつりあうことにほかならない．さらに，$E(n)$ の元で向きも保つ変換(上の表示で $|T|=1$)の全体を**運動群**とよぶ(ここでは $SE(n)$ と書こう)．　□

幾何的な概念と例 6, 7 の群は，次の対応関係にある．

ベクトルの演算を保つ ⟷ 一般線型群 $GL_n(\boldsymbol{R})$　(24)

さらに内積を保つ ⟷ 直交群 $O(n)$　(25)

さらに向きを保つ ⟷ 特殊直交群 $SO(n)$　(26)

順に条件をつけた．「向きと体積を保つ ⟷ 特殊線型群 $SL_n(\boldsymbol{R})$」も(24)と(26)の中間に位置している．以上は原点を固定するが，平行移動も許して原点を特別視しないのが例8の系列である．

無限遠直線を保つ ⟷ アフィン変換群 $A(n)$　(27)

さらに距離を保つ ⟷ 合同変換群 $E(n)$

さらに向きを保つ ⟷ 運動群 $SE(n)$

(27)の上にくるのが，射影変換の全体からなる**射影変換群**($PL(n)$と書こう：$PL$ = projective linear)で，これは一般に無限遠を動かすが，直線であることを保つ(直線を直線にうつす)性質がある．

この群の系列は，射影空間(無限遠点を考える) > アフィン空間(無限遠点は考えず，距離も角度も考えない) > ユークリッド空間(距離を考えた) > 向きを定めたユークリッド空間(裏返しを許さない)，という空間(の対称性)の系列に対応していると考えることができる(図3)．

射影変換まで考えると2次曲線が互いにうつりあう(「同じ」になる)ように，また一般の1次変換を用いると2次形式の符号数が調べやすかったように，一般に変換の群を大きくとると，ものごとは単純(簡明)になる．そして注目する性質がどの群で不変か(対称性)により，幾何学の立場が1つきまる．これはクラインの指摘である(エルランゲン・プログラム)[3)]．

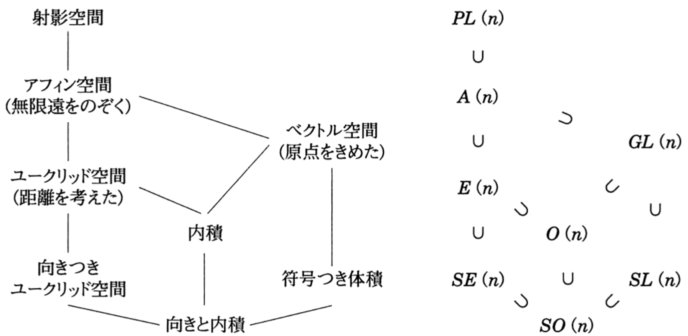



図3　群の系列と幾何的概念の対応

**例9**　対称行列 $B \in M_{n,n}(\boldsymbol{K})$ $(\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$ できまる2次形式 $Q_B(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n)$ とする．$Q_B(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - Q_B(\boldsymbol{x}) - Q_B(\boldsymbol{y}) = 2{}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{y}$ により，$A \in M_{n,n}(\boldsymbol{K})$ が $Q_B$ を変えない条件 ${}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x} = {}^t(A\boldsymbol{x})B(A\boldsymbol{x})$ $(\forall\, \boldsymbol{x})$ は

$$ {}^t(A\boldsymbol{x})B(A\boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{y}, \quad \text{すなわち} \quad {}^tABA = B $$

と書ける．${}^tABA = B$, ${}^tA'BA' = B$ ならば ${}^t(AA')B(AA') = B$ だから

$$ O(Q_B) := \{A \in GL_n(\boldsymbol{K}) \mid {}^tABA = B\} $$

は群をなす．$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ で $B$ の符号数が $(p,q)$ のとき $O(Q_B)=O(p,q)$ とも書き，$O(3,1)$ を相対論にちなみ**ローレンツ群**という．球面が回転で不変であるように，2次超曲面 $Q_B(\boldsymbol{x})=K$ は $A\in O(Q_B)$ で不変である：$Q_B(\boldsymbol{x})=K$ なら，$Q_B(A\boldsymbol{x})=K$．

$\boldsymbol{C}^n$ のエルミート形式を保つ群も同様に考えられる．とくに標準的エルミート内積を保つ変換のなす群

$$U(n):=\{A\in M_{n,n}(\boldsymbol{C})\mid A^*A=E\} \tag{28}$$

を**ユニタリ**(unitary)**群**，

$$SU(n):=U(n)\cap SL_n(\boldsymbol{C})=\{A\in U(n)\mid |A|=1\}$$

を**特殊ユニタリ群**とよぶ．　□

---

**注意**　複素数平面 $\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{R}^2$ と見て $e^{i\theta}$ 倍を行列表示すると(23)の回転行列 $R_\theta$ が得られた(§2.3)．この対応

$$f:U(1)\ni e^{i\theta}\mapsto R_\theta\in SO(2)$$

は1対1で，かつ群演算を保つ：

$$f(e^{i\theta}e^{i\varphi})=f(e^{i\theta})f(e^{i\varphi}).$$

これは $f$ による対応で $U(1)$ と $SO(2)$ が「同じ群」とみなせることを意味し，このことを「$U(1)$ と $SO(2)$ は群として同型である」と表す．

---

**問**　$GL_n(\boldsymbol{R})$ の次の部分集合が行列の積について群をなすことを示せ．

$$SL_n(\boldsymbol{Z}):=\{A=[a_{ij}]\mid a_{ij}\in\boldsymbol{Z},\ \det A=1\}\subset GL_n(\boldsymbol{R})$$

この群の元は $\boldsymbol{R}^n$ の何を保つと言えるか？

## 16.4　行列値の関数，とくに指数関数

例6〜9の群は連続的な対象で，かつ円や球面のような曲った「図形」だが，曲ったものも微分すれば平らになる．これを念頭に，行列値の関数について考えよう．行列値の関数 $A(t)=[a_{ij}(t)]$ についても，極限や微分が(各成分の極限や微分がすべて存在する限り)定義される：

$$\lim_{t\to t_0}A(t)=\left[\lim_{t\to t_0}a_{ij}(t)\right],\qquad \frac{dA(t)}{dt}=\left[\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\right].$$

$A(t), B(t)$ の積があり，ともに微分可能なら

$$\frac{d}{dt}A(t)B(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{A(t+h)B(t+h)-A(t)B(t)\}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{(A(t+h)-A(t))B(t+h)$$
$$+A(t)(B(t+h)-B(t))\}$$
$$= A'(t)B(t)+A(t)B'(t) \qquad \left(A'=\frac{dA}{dt},\ B'=\frac{dB}{dt}\right) \quad (29)$$

である．とくに $A = A(t)$ が正方で可逆ならば，$AA^{-1} = E$ を微分して

$$O = \frac{d}{dt}(AA^{-1}) = \frac{dA}{dt}A^{-1}+A\frac{d(A^{-1})}{dt}$$
$$\therefore \quad \frac{d(A^{-1})}{dt} = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}. \quad (30)$$

これは通常の公式 $(1/f)' = -f'/f^2$ に対応する．

**例 10**　(1)の曲面 $S$($\Leftrightarrow$ (2))の 1 点 $\boldsymbol{x}_0$ における接平面を求めてみよう．接平面は接ベクトルの全体である．接ベクトルとは，$S$ 上の曲線

$$\boldsymbol{x}(t) : {}^t\boldsymbol{x}(t)A\boldsymbol{x}(t)+2{}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}(t) = K \quad (31)$$

($t$ は実数)の速度ベクトルと考える．$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ とし，(29)を使って $t = 0$ で(31)を微分すれば ${}^t\boldsymbol{x}_0'A\boldsymbol{x}_0+{}^t\boldsymbol{x}_0A\boldsymbol{x}_0'+2{}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}_0' = 0$，すなわち

$$(\boldsymbol{x}_0', A\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{p}) = 0. \quad (32)$$

この解 $\boldsymbol{x}_0'$ は $A\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ なら 2 次元あり，点 $\boldsymbol{x}_0$ における接平面を与える．$\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{x}_0'$ ($t \in \boldsymbol{R}$) が 1 つの接線を与える(図 4)．

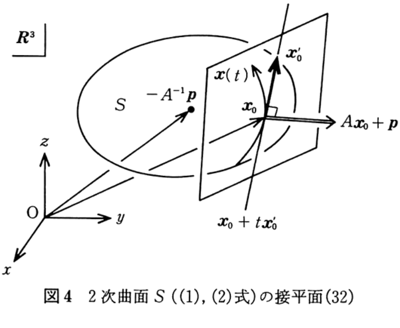



図 4　2 次曲面 $S$ ((1), (2)式)の接平面(32)

$A = \mathrm{diag}[\lambda, \mu, \nu]$，$\boldsymbol{p} = 0$ なら，(31), (32)は $\lambda x(t)^2+\mu y(t)^2+\nu z(t)^2$

$=K$，$\lambda x_0' x_0+\mu y_0' y_0+\nu z_0' z_0=0$ である．（なお，$A\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$ で困る点 $\boldsymbol{x}_0 \in S$ を $S$ の特異点という．例：図1の円錐の原点．） □

行列の関数の扱い方の例として，以下で改めて行列の指数関数

$$e^A := 1+A+\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3!}+\frac{A^4}{4!}+\cdots \qquad (A\text{は複素正方行列}) \tag{33}$$

を扱ってみよう．この収束を一般に示すため，$A$ の「大きさ」$\|A\|$ が非負実数としてきまり，数の絶対値のような性質をもつとしよう：

$$\|A+B\| \leqq \|A\|+\|B\| \qquad (\text{三角不等式}) \tag{34}$$

$$\|A\|=0 \Longleftrightarrow A=O \qquad (\text{正定値性}) \tag{35}$$

$$\|AB\| \leqq \|A\|\|B\|,\ \|kA\| \leqq |k|\|A\| \qquad (k\in \boldsymbol{C}) \tag{36}$$

すると(34)と(36)より，(和の大きさ)は(大きさの和)で，(積の大きさ)は(大きさの積)でおさえられる．

$$\therefore \quad \left\|\frac{A^n}{n!}+\frac{A^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\frac{A^N}{N!}\right\|$$

$$\leqq \frac{\|A\|^n}{n!}+\frac{\|A\|^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\frac{\|A\|^N}{N!} \qquad (n<N). \tag{37}$$

通常の指数関数の収束から $n, N\to\infty$ のとき (左辺)≦(右辺) → 0．よって(33)の各行列成分はコーシー列をなし(∵(35)式)，$e^A$ は収束する[4]．

(34), (35), (36)をみたすものに次の**作用素ノルム**(operator norm)がある．

$$\|A\|_o := \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\|A\boldsymbol{x}\|\left(=\max_{|\boldsymbol{x}\|\neq 0}\frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right) \tag{38}$$

$\boldsymbol{R}^n$ の標準的内積で球面 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ を考え，その上の連続関数 $\|A\boldsymbol{x}\|$ の最大値を考えた．球面は有界閉集合ゆえ連続関数は最大値をもち(高木貞治『解析概論』第1章定理13)，$\|A\|_o$ が定まる．

**補題**　(38)は(34), (35), (36)をみたす．また

$$|a_{ij}| \leqq \|A\|_o \qquad (i, j=1, \cdots, n). \tag{39}$$

**証明**　三角不等式(34)は，もともとの $\|(A+B)\boldsymbol{x}\| \leqq \|A\boldsymbol{x}\|+\|B\boldsymbol{x}\|$ による．正値性も同様．また定義式(38)より $\|A\boldsymbol{x}\| \leqq \|A\|_o\cdot\|\boldsymbol{x}\|$ なので

$$\max_{\|x\|\neq 0}\frac{\|AB\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\leqq\|A\|_o\max_{\|x\|\neq 0}\frac{\|B\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\leqq\|A\|_o\|B\|_o.$$

(39) は $|a_{ij}|=|(\boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j)|\leqq\|\boldsymbol{e}_i\|\|A\boldsymbol{e}_j\|$ よりわかる． □

**例 11** $A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}$ に対し，$A^2, A^3, \cdots$ もすべて上三角で，その対角成分は $\lambda_j^2, \lambda_j^3, \cdots$ である．

$$\therefore\quad e^A=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1} & * & * \\ 0 & e^{\lambda_2} & * \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3}\end{bmatrix}\qquad (*\text{の部分も収束する！})$$

□

(37) と (39) より $e^{tA}$ の成分は $t\in\boldsymbol{R}$ について広義一様に絶対収束し，微分と極限を順序交換できる(『解析概論』第 4 章定理 49)：

$$\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\frac{t^nA^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{t^{n-1}A^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\frac{A^n}{(n-1)!}=A\sum_{n=0}^{\infty}t^n\frac{A^n}{n!}.$$

つまり (14 章で使った通り)

$$\frac{d}{dt}e^{tA}=Ae^{tA}=e^{tA}A. \tag{40}$$

同様に，以下でも無限和の順序交換が許される．

**定理 38** $A, B$ を複素正方行列とするとき

1） $AB=BA\Longrightarrow e^Ae^B=e^{A+B}$ (41)

　とくに $B=-A$ とすれば，$(e^A)^{-1}=e^{-A}$. (42)

2） $B$ が可逆ならば，$Be^AB^{-1}=e^{BAB^{-1}}$. (43)

3） $\det(e^A)=e^{\mathrm{tr}A}$. (44)

**証明** 1） $AB=BA$ なら

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$$

などとふつうに 2 項展開でき，通常の指数関数と同様に

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B^n}{n!}\overset{m+n=N}{=}\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{A^{N-n}}{(N-n)!}\frac{B^n}{n!}$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!\,n!} \frac{A^{N-n}B^n}{N!} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(A+B)^N}{N!}.$$

2） 左辺 $= B\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}\right) B^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{BA^m B^{-1}}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(BAB^{-1})^m}{m!}.$

3） $|e^{(t+h)A}| - |e^{tA}| = (|e^{hA}| - 1)|e^{tA}|$ なので(縦線は行列式),

$$\frac{d}{dt}|e^{tA}| = c|e^{tA}|,\quad ただし\quad c := \left(\frac{d}{dt}|e^{tA}|\right)_{t=0}.$$

$c = \mathrm{tr}\,A$ なら $|e^{tA}| = e^{t\,\mathrm{tr}\,A}$ となる．そこで $|1+hA+\cdots| = 1+h\,\mathrm{tr}\,A + \cdots$ なら良いが，一般に(対角成分の積とそれ以外の項に分ければ)

$$\begin{vmatrix} 1+ha_{11} & ha_{12} & \cdots & ha_{1n} \\ ha_{21} & 1+ha_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & ha_{n-1,n} \\ ha_{n1} & \cdots & ha_{n,n-1} & 1+ha_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= (1+ha_{11})(1+ha_{22})\cdots(1+ha_{nn}) + o(h)$$
$$= 1 + h(a_{11}+\cdots+a_{nn}) + o(h).$$

ここで $o(h^2)$ は $h$ について 2 次以上の無限小 ($\frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0$) である． □

---

**注意 1** (44)の証明はより安直にもできる．$|B^{-1}AB| = |A|$, $\mathrm{tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{tr}A$ だから，$A$ を三角化(または対角化)して考えればよい．たとえば 3 次なら(例 11)

$$|e^A| = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & e^{\lambda_2} & \\ 0 & & e^{\lambda_3} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} = e^{\mathrm{tr}A}.$$

**注意 2** (41)に関連して，$AB - BA \neq O$ のときも次が成り立つ．

$$e^{A+B} = \lim_{n\to\infty} (e^{A/n} e^{B/n})^n \tag{45}$$

(トロッターの公式；§ 5.4，練習問題 16-6)．なお(47)も参照．

---

**問** (i) 2 次曲面 $S: x^2+2xy-3yz+z^2+4 = 0$ の点 $P = (1, 2, 3)$ における接平面の方程式を求めよ．

(ii) 行列式 $|A(t)| = |\boldsymbol{a}_1(t), \cdots, \boldsymbol{a}_n(t)|$ の微分は，各 $j$ 列を微分した行列式の和であることを示せ：

$$\frac{d}{dt}|A(t)| = \sum_{j=1}^{n} |\boldsymbol{a}_1(t), \cdots, \boldsymbol{a}_j'(t), \cdots, \boldsymbol{a}_n(t)|.$$

## 16.5 リー代数入門

背伸びして，群 $G$ の単位元における「接空間」を考えてみる．これを慣

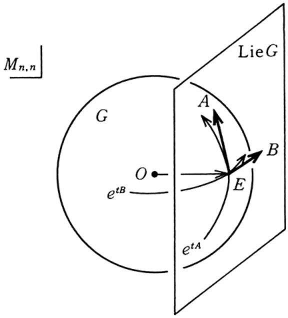



**図5**　群 $G$ の接空間がリー代数 Lie $G$ である．この図は模式的で，$G$ は $M_{n,n}$ を内と外にわけるとは限らず，また有界でないことも(例：$GL_n, SL_n$)，いくつかの「島」からなることもある(例：$O(n)$)．

例に従い Lie $G$ と書けば[5]，例 10 と同様

$$\text{Lie } G :=(A(0)=E \text{ である曲線} A(t)\in G\ (t\in \boldsymbol{R}) \text{ の},$$
$$\text{速度ベクトル} \frac{dA}{dt}(0) \text{ 全体}).$$

$A(t)$ は原点 $E=A(0)$ で微分できれば何でもよいが，じつは指数関数をとれば十分であることが知られている．すると $A(t)=e^{tA}$ の $t=0$ での速度は(40)より $A'(0)=A$ だから

$$\text{Lie } G=\{A\in M_{n,n}(\boldsymbol{R}) \mid e^{tA}\in G\ (\forall t\in \boldsymbol{R})\} \tag{46}$$

である．これを例 6, 7, 9 の群に対し，対応する小文字でも表す．

**例 12**　$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とする．任意の $A\in M_{n,n}(\boldsymbol{K})$ に対して $e^{tA}$ は可逆 ($e^{tA}\in GL_n(\boldsymbol{K})$) だから

$$gl_n(\boldsymbol{K})\,(=\text{Lie } GL_n(\boldsymbol{K}))=M_{n,n}(\boldsymbol{K}).$$

次に $SL_n$ の条件 $\det e^{tA}=1$ を $t=0$ で微分し，$A\in sl_n(\boldsymbol{K})$ のための条件 $\mathrm{tr}\,A=0$ を得る：

$$sl_n(\boldsymbol{K})\,(=\text{Lie } SL_n(\boldsymbol{K}))=\{A \mid \mathrm{tr}\,A=0\}.$$

また ${}^t(e^{tA})e^{tA}=E$ を $t=0$ で微分すれば，$o(n)$ の条件として ${}^tA+A=O$ ($A$ は実交代行列)が必要．これは $(e^{sA})^{-1}=e^{-sA}=e^{-s\,{}^tA}={}^t(e^{sA})$ より十分条件となる：

$$o(n)\,(=\mathrm{Lie}\,O(n)) = \{A \in M_{n,n}(\boldsymbol{R}) \mid A+{}^tA = O\}.$$

実行列 $A$ が ${}^tA+A = O$ なら対角成分は 0 であり，$\mathrm{tr}\,A = 0$. これは

$$\mathrm{Lie}\,O(n) = \mathrm{Lie}\,SO(n)$$

を意味する．$u(n)$ の条件も同様だが，対角成分は純虚数ならばよく，$u(n) \neq su(n)$ なので注意しよう：

$$u(n)\,(=\mathrm{Lie}\,U(n)) = \{A \in M_{n,n}(\boldsymbol{C}) \mid A^*+A = O\},$$
$$su(n)\,(=\mathrm{Lie}\,SU(n)) = \{A \in u(n) \mid \mathrm{tr}\,A = 0\}.$$

□

接空間は一般にベクトル空間(和とスカラー倍で閉じる)なので，Lie $G$ もそうである：これは(45)からもわかる．Lie $G$ にはさらに $G$ の演算が遺伝する．

$$e^{tA}e^{tB}e^{-tA}e^{-tB} = \left(1+tA+\frac{t^2}{2}A^2+\cdots\right)\left(1+tB+\frac{t^2}{2}B^2+\cdots\right)$$
$$\times\left(1-tA+\frac{t^2}{2}A^2+\cdots\right)\left(1-tB+\frac{t^2}{2}B^2+\cdots\right)+o(t^2)$$
$$= 1+t^2(AB-BA)+o(t^2) \tag{47}$$

であり(左辺のテイラー展開)[6]，$A, B \in \mathrm{Lie}\,G$ なら左辺は単位元を通る $G$ 上の曲線．$s = t^2$ について原点で微分すれば，$AB-BA$ がその速度ベクトルとなる．つまり Lie $G$ は

$$A, B \mapsto [A, B] := AB-BA \tag{48}$$

という**交換子積(リー・ブラケット)**でも閉じる．$[A, B]$ は $A, B$ それぞれについて線型で，簡単にわかるように次をみたす．

$$[A, B] = -[B, A] \qquad \text{(交代性，反対称性)}$$
$$[[A, B], C]+[[B, C], A]+[[C, A], B] = O \tag{49}$$

(49)を**ヤコビ恒等式**といい，このような演算 $[\ ,\ ]$ が定義されたベクトル空間を**リー代数**(Lie algebra)という．リー代数は必ずある群 $G$ の接空間になることが知られている．$G$ についての問題を Lie $G$ の問題に翻訳すると，線型代数で解決できることが多い．

**例 13**　$o(3)$ は実交代行列全体で，3 次元(3 = $\boldsymbol{R}^3$ の回転のパラメータの

数)．基底 $E_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_3 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

を選ぶと

$$[E_1, E_2] = E_3, \quad [E_2, E_3] = E_1, \quad [E_3, E_1] = E_2. \tag{50}$$

$e^{\theta E_1}$ は $x$ 軸中心の回転 $X_\theta$((11)式)で，$E_1 = X'_{\theta=0}$．(50)の右辺が 0 でないことが軸の異なる 2 つの回転が一般に可換でないことに対応する． □

**問** (i) (47), (49), (50)を確かめよ．

(ii) $e^{\theta E_1} = X_\theta$ を確かめよ．また $e^{\theta E_2}, e^{\theta E_3}$ を求めよ．

(iii) $\dim o(n)$ はいくつか．(これは $O(n)$ の元，すなわち $n$ 次直交行列がいくつのパラメータできまるかを示す数である．)

## 道案内

1）一般に $V, W$ を体 $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とするとき，$f: V \to W$ がアフィン写像とは，線型写像($f$ の「1次部分」)$L_f: V \to W$ があって $f(\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{v}') = L_f(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')$ となるときをいう．これを $f(\boldsymbol{v}) = L_f(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')+f(\boldsymbol{v}')$ と書き，$\boldsymbol{v}'$ を固定し $-L_f(\boldsymbol{v}')+f(\boldsymbol{v}')$ を $\boldsymbol{p}$ と見れば(5)の形になる($f(\boldsymbol{v}) = L_f(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{p}$)．

2）これで暗黙のうちに視線の前方と後方 ($z>0$, $z<0$) の区別がなくなることに注意．この「射影化」の操作は，付録3でいう同値類別の一例である．

3）どんな群で不変な性質のみを考えるか，群の作用で幾何学がきまる．こう明快に述べたのがクラインのエルランゲン(という町で1872年に述べた)・プログラム(研究計画)であった．背景については

　　難波誠『群と幾何学』現代数学社(1997)

を参照．なお図3のうち，アフィン写像からなる群 $A(n), E(n), SE(n)$ は標準的記号がない．アフィン写像は平行移動と線型写像の合成に分解でき，線型写像からなる群 $GL(n), SL(n), O(n), SO(n)$ の方がより基本的だからであろう：これらは(ほぼ)世界標準の記号である．平行移動の群 $\boldsymbol{R}^n$ との「半直積」$\ltimes$ として，$A(n) = GL(n) \ltimes \boldsymbol{R}^n$, $E(n) = O(n) \ltimes \boldsymbol{R}^n$, $SE(n) = SO(n) \ltimes \boldsymbol{R}^n$ と書くべきであった：5)のいずれかを参照．ここでは $A, E$ は affine, Euclid に，$SE$ は $SO, SL$ にあわせた．

一方，量子力学において粒子は波動関数とよばれる微分方程式の解で表され，相対論的要請により座標変換で不変な方程式が粒子を分類すると考えられる．この方針は次で読むことができる．

　　大貫義郎『ポアンカレ群と波動方程式』岩波書店(1976)

これもエルランゲン・プログラムの精神のひとつと考えうるであろう．

4）(34)～(36), (39)を満たす**ノルム**として，作用素ノルムのほかにも，内積から定まる距離 $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^*A)}$ がある(良い練習問題)．絶対収束するテイラー級数には，収束半径(高木貞治「解析概論」第4章)より小さいノルムを持つ正方行列を代入できる(各成分が絶対収束する)ことが，$e^A$ の収束のとき(37)と同様にわかる．

5）S. Lie (1842-1899, ノルウェー)にちなむ．興味をもたれた読者には

　　山内恭彦・杉浦光夫『連続群論入門』培風館(1966)
　　佐武一郎『リー群の話』日本評論社(1982)
　　平井武『線形代数と群の表現(上，下)』朝倉書店(2001)
　　熊原啓作『行列・群・等質空間』日本評論社(2001)

をおすすめしよう．

6）(47)は左辺をテーラー展開したのだが，次の公式を使ってもわかる．

$$e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)+\frac{t^2}{2}[A,B]+\frac{t^3}{3}\frac{[A,[A,B]]+[[A,B],B]}{2}+\cdots}$$

これをキャンベル-ハウスドルフの公式という．

# 練習問題

**16-1** 次の非斉次2次式の定める図形を標準形にし，概形を描け．

(i) $x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2-2\sqrt{3}x-2y+3=0$

(ii) $3x^2+10y^2+3z^2+6\sqrt{6}xy+6\sqrt{6}yz-10yz+4x-12\sqrt{6}y+4z=12$

(iii) $x^2+2y^2+z^2+2xy-2yz+2y-4z-1=0$

**16-2** ユークリッド平面の変換 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ が「距離を保つ」($f(\mathrm{P}), f(\mathrm{Q})$ 間の距離が P, Q 間の距離に等しい)とき，$f$ は平行移動，原点中心の回転，および必要ならある直線についての裏返しの合成であることを示せ．

**16-3** $i$ は虚数単位とする．次の行列をパウリのスピン行列という．

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \sigma_2=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix},\quad \sigma_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

(i) ブラケット $[\sigma_j, \sigma_k]$，指数関数 $e^{it\sigma_j}$ $(t\in\boldsymbol{R})$ を求めよ．

(ii) $i\sigma_1$, $i\sigma_2$, $i\sigma_3$ は $su(2)=\{X\in M_{2,2}(\boldsymbol{C})\,|\,X+X^*=O,\ \mathrm{tr}\,X=0\}$ の基底をなすことを示せ．

**16-4** $V := \{X\in M_{2n,2n}(\boldsymbol{C})\,|\,XJ+J\,{}^tX=O\}$，ただし $J:=\begin{bmatrix}O&E\\-E&O\end{bmatrix}$ ($E$ は $n$ 次単位行列)とする．$V$ はシンプレクティック・リー代数とよばれる．

(i) $V$ が $M_{2n,2n}(\boldsymbol{C})$ の複素部分ベクトル空間であることを示せ．

(ii) $V$ の(複素)次元はいくつか．

(iii) $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\in\boldsymbol{C}^{2n}$ に対し $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_J := {}^t\boldsymbol{v}J\boldsymbol{w}$ とおく．$X\in M_{2n}(\boldsymbol{C})$ が

$$(e^{sX}\boldsymbol{v}, e^{sX}\boldsymbol{w})_J=(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_J \qquad (s\in\boldsymbol{R})$$

をみたすためには，$X\in V$ が必要であることを示せ．

**16-5** (i) $A$ は $n$ 次の正値実対称行列とする．対角化を用い，次を示せ．

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}}\,d\boldsymbol{x}=\frac{1}{\sqrt{|\pi A|}} \qquad (d\boldsymbol{x}=dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n,\ |\cdot|\ \text{は行列式})$$

(ii) $A$ は(i)と同じで，$\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^n$ とする．$\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}+{}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{x}}\,d\boldsymbol{x}$ を求めよ．

**16-6** トロッターの公式 $e^{A+B}=\lim_{n\to\infty}(e^{A/n}e^{B/n})^n$ を示そう(p 263 注意 2)．$S_n=e^{(A+B)/n}$，$T_n=e^{A/n}e^{B/n}$ とおき，$\|X\|_o$ で作用素ノルム((38)式)を表す．

(i) $\|S_n\|_o \leqq e^{\|A+B\|_o/n}$，$\|T_n\|_o \leqq e^{\|A\|_o/n}e^{\|B\|_o/n}$ を示せ．

(ii) $\|S_n^n-T_n^n\|_o \leqq ne^{\|A\|_o+\|B\|_o}\|S_n-T_n\|_o$ を示せ．

(iii) $\|S_n-T_n\|_o \leqq \dfrac{M}{n^2}$ ($M$ は正定数)を示せ．これと(ii)より $\|S_n^n-T_n^n\|_o\to 0$，$\therefore\ T_n^n\to e^{A+B}$．[(ii)のヒント：一般に $X^n-Y^n=\sum_{k=0}^{n} X^k(X-Y)Y^{n-k-1}$.]

# 17章：ベクトル空間の間の演算

2つのベクトル空間に対し，次元が和，差，積になるような新しいベクトル空間を考えることができる．これらは「分解と合成」の発想を自然に記述するための道具(ことば)であり，幾何的直観や対称性の視点を活かすためにも欠かせない．数の範囲(体)を $\boldsymbol{K}$ で表す．簡単のため，とくに断らない限りベクトル空間は有限次元とする．

## 17.1 空間の「和」と「差」：直和と補空間

2つの数直線 $\boldsymbol{R}$ から平面 $\boldsymbol{R}^2$ ができる．同様に：

**定義 27** $U, V$ が体 $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間のとき，直積集合

$$U\times V=\{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{u}\in U, \boldsymbol{v}\in V\} \tag{1}$$

には次のように和とスカラー倍を定義できる．

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})+(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}'):=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') \tag{2}$$

$$k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}):=(k\boldsymbol{u}, k\boldsymbol{v}) \qquad (k\in \boldsymbol{K}). \tag{3}$$

この $\boldsymbol{K}$-ベクトル空間 $U\times V$ を $U$ と $V$ の**直和**という(図1). □

$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{0})$を $\boldsymbol{u}$ と，$(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v})$を $\boldsymbol{v}$ と見れば，$U, V$ を $U\times V$ の部分ベクトル空間と見なせる．数ベクトル空間の直和分解のときと同じく，$U\times V$ の元は

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{0})+(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \qquad (\boldsymbol{u}\in U,\ \ \boldsymbol{v}\in V)$$

と一通りに書ける．これは数ベクトル空間のとき ⊕ で表した直和分解と同じなので(§10.2，定義14)，$U\times V$ を以後 $U\oplus V$ と書いてよい．とく

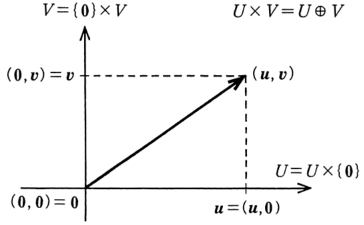



図1 直和 $U\oplus V$ と，各成分への射影．

に $U$ と $V$ それぞれの基底をあわせれば全体の基底が得られるから

$$\dim(U \oplus V) = \dim U + \dim V. \tag{4}$$

以上は $U, V$ から $U \oplus V (= W)$ を定義した．先に $W$ があると考えてこれを部分空間 $U, V$ へ分解するには，やはり数ベクトル空間と同様

$$U + V = W, \qquad U \cap V = \{\mathbf{0}\} \tag{5}$$

ならばよい．このときも $W = U \oplus V$ と書き，$U$ と $V$ は互いの**補空間**であるという．また $W$ の元

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \qquad (\boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{v} \in V)$$

に $\boldsymbol{u}$ を($\boldsymbol{v}$ を)対応させる写像を第1成分への(第2成分への)**射影**という．

**例1**　$M_{n,n}(\boldsymbol{K})$ の部分空間

$$\mathrm{Alt}_n = \{A \in M_{n,n}(\boldsymbol{K}) \mid A = -{}^tA\},$$
$$\mathrm{Sym}_n = \{A \in M_{n,n}(\boldsymbol{K}) \mid A = {}^tA\}$$

(§14.1)は互いに補空間である．$\mathrm{Alt}_n$ の補空間としては

$$\{A = [a_{ij}] \in M_{n,n}(\boldsymbol{K}) \mid a_{ij} = 0 \ (i > j)\} \tag{6}$$

(上三角，対角成分は任意)をとることもできる．

**例2**　$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ とする．ベクトル空間 $W$ が(正定値な)内積 $(\ ,\ )_W$ をもてば，数ベクトル空間のときのように部分空間 $V \subset W$ の**直交補空間** $V^\perp$ が考えられる：

$$V^\perp := \{\boldsymbol{w} \in W \mid (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_W = 0 \ (\forall \boldsymbol{v} \in V)\}. \tag{7}$$

$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ を $V$ の正規直交基底とし，$\boldsymbol{w} \in W$ に対し

$$\boldsymbol{w}_V := \sum_{j=1}^{m} (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_j)_W \boldsymbol{v}_j, \qquad \boldsymbol{w}_\perp := \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_V \tag{8}$$

とすれば $(\boldsymbol{w}_\perp, \boldsymbol{v}_j)_W = 0$．つまり $\boldsymbol{w}_\perp \in V^\perp$ であり

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_V + \boldsymbol{w}_\perp, \qquad V + V^\perp = W.$$

内積の正値性より $V \cap V^\perp = \{\mathbf{0}\}$ であり，$W = V \oplus V^\perp$ となる．　□

**問**　例1の $\mathrm{Alt}_n$ に補空間を(6)のように選び，$M_{n,n}(\boldsymbol{K}) = \mathrm{Alt}_n \oplus (6)$ とするとき，右辺の各直和成分への射影を求めよ．(すなわち，$A \in M_{n,n}(\boldsymbol{K})$ に対応する右辺の元の組を与えよ．)

## 17.2　もうひとつの差：商空間とその応用

補空間は(4)の $U$ のように「空間 $W$ と $V$ の差」だが，$W$ に内積がないと(「直交方向」という)標準的なとり方がない(任意の基底を正規直交と宣言して内積を定めれば，どんな補空間も直交補空間にできてしまう！)．一方，次の「差」は一通りにきまる．

**定義28**　$V$ を $W$ の部分ベクトル空間とするとき，$V$ を $\boldsymbol{w} \in W$ だけ「ずらした」アフィン部分空間

$$\boldsymbol{w}+V := \{\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in V\} \tag{9}$$

の全体を $W/V$ と書く．和とスカラー倍を

$$(\boldsymbol{w}_1+V)+(\boldsymbol{w}_2+V) := (\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)+V \tag{10}$$

$$k(\boldsymbol{w}+V) := (k\boldsymbol{w})+V \tag{11}$$

で定め，$W/V$ を $W$ の $V$ による**商ベクトル空間**(商空間)とよぶ．(9)を単に $[\boldsymbol{w}]$ とも書き，$\boldsymbol{w} \in W$ に $[\boldsymbol{w}] \in W/V$ を対応させる写像を**標準射影**という．　□

$[\boldsymbol{w}]$ と $[\boldsymbol{w}']$ が $W/V$ の元として等しいのは

$$\boldsymbol{w}+V = \boldsymbol{w}'+V,\ \text{つまり}\quad \boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}' \in V \tag{12}$$

のとき．これは整数 $n$ を $N$ で割った余りに注目するときと似ている：「$n$ と $n'$ は $N$ で割った余りが等しい」は $n-n' \in N\boldsymbol{Z}\,(=\{N\text{の倍数}\})$ と書ける．「5と2は3で割った余りが同じ」(差が3の倍数，$5-2 \in 3\boldsymbol{Z}$)を $5 \equiv 2 \mod 3$ などと書くのと同様に，$[\boldsymbol{w}]$ を $\boldsymbol{w} \mod V$ とも書く．

演算(10),(11)には一言必要である．$[\boldsymbol{w}_1]=[\boldsymbol{w}_1']$，$[\boldsymbol{w}_2]=[\boldsymbol{w}_2']$ のとき，つまり((12)のように)

$$\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_1',\ \ \boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{w}_2' \in V \tag{13}$$

のとき $[\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2]=[\boldsymbol{w}_1'+\boldsymbol{w}_2']$ でないと，和(10)が $W/V$ の元の間に定まった(well-defined である)と言えない：これは

$$(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)-(\boldsymbol{w}_1'+\boldsymbol{w}_2') = (\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_1')+(\boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{w}_2') \in V \qquad (\because (13))$$

より大丈夫．(11)の定義も同様に問題ない．

**補題1**　$U \subset W$ は $V$ の補空間で，$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ は $U$ の基底であるとす

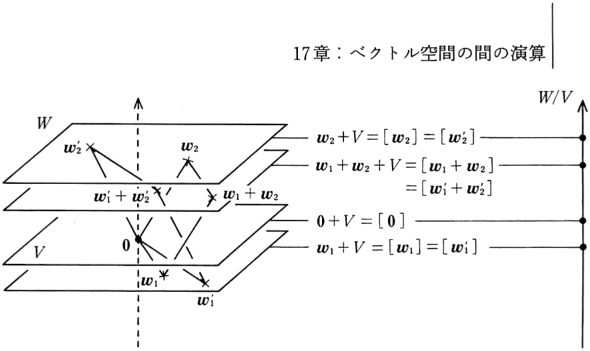



**図2** 商空間 $W/V$ の元は集合 $\boldsymbol{w}+V$ であり，$\boldsymbol{w}$ をその代表という．

る．このとき $[\boldsymbol{u}_1], \cdots, [\boldsymbol{u}_m]$ は $W/V$ の基底になる．とくに，

$$\dim W/V = \dim U = \dim W - \dim V.$$

**証明** $W$ の元は $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{v} \in V)$ と書けるが，$[\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{u}]$．よって $W/V$ の元は必ず $[\sum c_j \boldsymbol{u}_j] = \sum c_j [\boldsymbol{u}_j]$ と，$[\boldsymbol{u}_j]$ の1次結合で書ける．今 $c_1[\boldsymbol{u}_1]+\cdots+c_m[\boldsymbol{u}_m] = \boldsymbol{0} \in W/V$ なら，$c_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+c_m\boldsymbol{u}_m \in V$．左辺は $U$ の元で仮定より $U \cap V = \{\boldsymbol{0}\}$ ゆえ $\boldsymbol{0}$ である．$\therefore c_1 = \cdots = c_m = 0$． □

商空間 $W/V$ は「分母」$V$ の情報を忘れて(無視して)定まるが，積極的に用いることで新たな対象を構成できる．

**例3** 有理数の全体 $\boldsymbol{Q}$ と $\sqrt{2}$ から，加減乗除で生ずる数の全体を $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ と書く．その元は $a+b\sqrt{2}$ $(a, b \in \boldsymbol{Q})$ の形だから，1 と $\sqrt{2}$ を基底とする $\boldsymbol{Q}$ 上のベクトル空間になる．

$$\boldsymbol{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \boldsymbol{Q}\} = \boldsymbol{Q}\cdot 1 \oplus \boldsymbol{Q}\cdot\sqrt{2} \tag{14}$$

$\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ での計算は，文字 $t$ が $t^2 = 2$ をみたすとして，$t$ の文字式同士を計算したと言っても同じである．$t$ の式(多項式)全体 $\boldsymbol{Q}[t]$ で $t^2$ を 2 と思うには，$t^2-2$ の何倍かになっているもの全体

$$I = \{f(t)(t^2-2) \mid f \in \boldsymbol{Q}[t]\} = \boldsymbol{Q}[t](t^2-2)$$

を無視すればよい．$I$ は $\boldsymbol{Q}[t]$ の部分空間で，商空間

$$\boldsymbol{Q}[t]/I = \boldsymbol{Q}[t]/\boldsymbol{Q}[t](t^2-2) \tag{15}$$

ができる．$t^2$ 以上のべきは $t^2=2$ を使って1と $t$ の和で書けるから，$1 \bmod I$，$t \bmod I$ が基底となり

$$\boldsymbol{Q}[t]/I = \boldsymbol{Q}\cdot(1 \bmod I) \oplus \boldsymbol{Q}\cdot(t \bmod I)$$

である．以下では $1 \bmod I$，$t \bmod I$ を単に $1, t$ と書こう．($t \bmod I$ を $[t]$ と書くと，$\boldsymbol{Q}\cdot[t]$ が多項式全体とまぎらわしい．）(15)は(無限次元)/(無限次元)だが，商は2次元である．$a+tb$ 倍を計算すると

$$\begin{aligned}(a+tb)(x+ty) &= ax+t(bx+ay)+t^2by \\ &= (ax+2by)+t(bx+ay)+(t^2-2)by \\ &= (ax+2by)+t(bx+ay) \quad \bmod I.\end{aligned}$$

これは $t$ を $\sqrt{2}$ とした結果と同じである．$x, y \in \boldsymbol{Q}$ について線型な(1次の)式と見て行列表示すれば(§2.3と同様に！)，

$$(a+tb)(x+ty) = [1, t]\begin{bmatrix} ax+2by \\ bx+ay \end{bmatrix} = [1, t]\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

すなわち，$a+tb$ 倍する写像

$$f_{a+tb} : \boldsymbol{Q}[t]/I \ni x+ty \mapsto (a+tb)(x+ty) \in \boldsymbol{Q}[t]/I$$

は行列 $\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix}$ で表される．有理数 $a, b$ がどちらか0でなければ，行列式 $a^2-2b^2 \neq 0$ ($\Leftrightarrow \sqrt{2}$ の無理数性)．よって $a+tb \neq 0$ 倍という線型写像 $f_{a+tb}$ は可逆であり，これは0でない(15)の元で割り算ができることを意味する[1]．これで $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ を商空間として構成できた．

**例4**　図3の「穴」は1個だが，これを定式化しよう．

線分に向きを考え，たとえば $PQ=-QP$ とし，その「境界」は端点の差 $P-Q$ と考えよう．すると $PQ+QR$ の境界は $(P-Q)+(Q-R)=P$

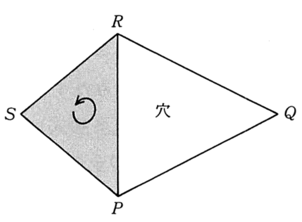



**図3**　図形 $PQRS$．三角形 $PRS$ には面がついているが，三角形 $PQR$ は辺だけで「穴」があいている．

$-R$ などとなって調子がよい．「境界をとる」操作を，線分の１次結合から点の１次結合への写像などと考えるため，次のベクトル空間を考える．

$$\begin{aligned} V_2 &:= \boldsymbol{K}PRS \\ V_1 &:= \boldsymbol{K}PQ \oplus \boldsymbol{K}QR \oplus \boldsymbol{K}RP \oplus \boldsymbol{K}SP \oplus \boldsymbol{K}SR \\ V_0 &:= \boldsymbol{K}P \oplus \boldsymbol{K}Q \oplus \boldsymbol{K}R \oplus \boldsymbol{K}S \qquad (\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}) \end{aligned} \tag{16}$$

$PQ$ などはこれで１つの文字(基底)と考えるが，向きを反映させ $-PQ = QP$ と考える(同様に考え $-PRS = RPS$ だが，以下では使わない)．

面 $PRS$ の境界をとると $PR+RS+SP$ だが，この操作($\partial_2$ と書こう)を

$$\partial_2 : V_2 \longrightarrow V_1, \quad \partial_2(kPRS) = k(PR+RS+SP) \qquad (k \in \boldsymbol{K})$$

という線型写像と考える．線分の境界をとる操作($\partial_1$ と書こう)も

$$\begin{aligned} &\partial_1(PQ) = P-Q, \quad \partial_1(QR) = Q-R, \quad \partial_1(RP) = R-P, \\ &\partial_1(SP) = S-P, \quad \partial_1(SR) = S-R \end{aligned}$$

という線型写像 $\partial_1 : V_1 \to V_0$ と考える．$\partial_1$ の核が「境界のない道」(閉路)であるべきだが，$\gamma = aPQ+bQR+cRP+dSP+eSR \in V_1$ に対し

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \partial_1(aPQ+bQR+cRP+dSP+eSR) \\ &= (a-c-d)P+(-a+b)Q+(-b+c-e)R+(d+e)S \end{aligned}$$

とすると，$a-c-d=0$ などより $a=b=c+d$，$d=-e$．すなわち

$$\gamma = a(PQ+QR)+(a-d)RP+d(SP-SR)$$

$$\therefore \quad \mathrm{Ker}\,\partial_1 = \{a\gamma_1+e\gamma_2 \mid a, e \in \boldsymbol{K}\} = \boldsymbol{K}\gamma_1 \oplus \boldsymbol{K}\gamma_2 \tag{17}$$

$$(\gamma_1 = PQ+QR+RP, \quad \gamma_2 = PR+RS+SP)$$

とわかる．$\gamma_1, \gamma_2$ はたしかに右，左の三角形を回る閉路で，$\gamma_1+\gamma_2 = PQ+QR+RS+SP$ も図形の外側を「ひとまわり」する閉路である．

さて $\gamma_2 = \partial_2(PRS)$ は $PRS$ という面の境界で，閉路だが「穴」でない．面の境界 $\mathrm{Im}\,\partial_2$ を無視するため，商空間をとろう．

$$H_1 := \mathrm{Ker}\,\partial_1 / \mathrm{Im}\,\partial_2 \tag{18}$$

($\partial_2$ の像は閉路 $\partial_2(PRS) = PR+RS+SP \in \mathrm{Ker}\,\partial_1$ のスカラー倍ゆえ，$\mathrm{Im}\,\partial_2 \subset \mathrm{Ker}\,\partial_1$．よって商空間がとれる．)

すると(17)で $[\gamma_2] = [PR+RS+SP] = \mathbf{0}$ (無視！)なので，$H_1$ の基底として(補題１より)

$$[\gamma_1] = [PQ+QR+RS] = \gamma_1 \mod \partial_2(V_2)$$

をとれる．$[\gamma_1+k\gamma_2]$ $(k \in \boldsymbol{K})$ はすべて $H_1$ の同じ元を表し，$PQR$ を一周

する任意の閉路を「穴のイデア」として同じと思える舞台ができた．基底 $[\gamma_1]$ が穴を，次元 $\dim H_1=1$ がその数を表す．商空間 $H_1$ をこの図形の **1 次元ホモロジー**という[2)]． □

**問** （i） (17) を確かめよ．

（ii） $\boldsymbol{C}[x]$ の部分空間 $I$ で，$\boldsymbol{C}[x]/I\cong\boldsymbol{C}^n$ となるものを挙げよ．

（iii） 図3で面 QRS がない場合を考え，$V_2=\{\boldsymbol{0}\}$，$\mathrm{Im}\,\partial_2=\{\boldsymbol{0}\}$ とする．このとき $H_1=\mathrm{Ker}\,\partial_1/\mathrm{Im}\,\partial_2$ は何次元か．また基底を一組あげよ．

## 17.3 双対空間

**定義 29** $V, W$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とするとき，$V$ から $W$ への線型写像全体を $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V, W)$ と書く．これは $M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ と同様にベクトル空間である．

---

線型写像 ($\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V, W)$の元) $f, g: V\to W$ の和とスカラー倍は，もちろん $(af+bg)(\boldsymbol{v})=af(\boldsymbol{v})+bg(\boldsymbol{v})$ で定まる．$V$ や $W$ に基底をとれば $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V, W)$ の元は行列表示でき，その意味では新しいことはない．しかし同じ次元のベクトル空間でも，実態は接空間であったり道の空間だったりする．それを現(あらわ)にしつつ基底(座標)によらず議論するため，これらの言葉が用いられる．

---

とくに $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V, \boldsymbol{K})$ を $V$ の**双対空間**とよび，$V^\vee$（または $V^*$）と表す．いいかえれば，(斉次)1 次関数

$$\varphi: V\longrightarrow \boldsymbol{K},\qquad \varphi(a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{w})=a\varphi(\boldsymbol{v})+b\varphi(\boldsymbol{w}) \tag{19}$$

の全体が $V$ の双対空間 $V^\vee$ である． □

**例 5** ア） $V=\bigoplus_{j=1}^{n}\boldsymbol{K}\boldsymbol{e}_j$ を列ベクトルの空間とする．行ベクトル ${}^t\boldsymbol{a}=[a_1, \cdots, a_n]$ は，行列の積により $\boldsymbol{x}=\sum x_j\boldsymbol{e}_j\in V$ の 1 次関数を定める：

$${}^t\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}):={}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}=[a_1, \cdots, a_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=a_1x_1+\cdots+a_nx_n. \tag{20}$$

つまり ${}^t\boldsymbol{a}\in V^\vee$．とくに行の基本ベクトル ${}^t\boldsymbol{e}_j$ は

$${}^t\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k=\delta_{j,k}\qquad \therefore\quad {}^t\boldsymbol{e}_j(\boldsymbol{x})=x_j \tag{21}$$

をみたし，座標 $x_j$ をとりだす**座標関数**になる．

イ）$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ のときの(20)は，$\boldsymbol{R}^n$ の内積 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})={}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}$ のことを

$$(\boldsymbol{v}, \cdot): \boldsymbol{R}^n \ni \boldsymbol{w} \mapsto (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \in \boldsymbol{R}^n \qquad (\cdot \text{ に } \boldsymbol{w} \text{ を入れる})$$

と，$\boldsymbol{v}$ できまる $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{R}^n$ の1次関数と見たとも言える．つまり $(\boldsymbol{v}, \cdot)\in(\boldsymbol{R}^n)^\vee$ であり，$\boldsymbol{R}^n$ を $\boldsymbol{R}^n$ の双対空間と考えられる．$\{\boldsymbol{e}_j\}$ 自身が $\{\boldsymbol{e}_j\}$ の双対基である $((\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)=\delta_{j,k})$．一般にも $V$ を有限次元ベクトル空間とするとき

$$\langle\ ,\ \rangle: V\times V\to\boldsymbol{K}; \quad \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\in V\mapsto \langle\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle\in\boldsymbol{K}$$

があって第1，第2成分について線型としよう(**2次形式**または**双線型形式**)．すると $V$ の元を双対空間の元とみなす写像 $\iota: \boldsymbol{v}\in V\mapsto\langle\boldsymbol{v}, \cdot\rangle\in V^\vee$ が定まり，$\boldsymbol{v}$ について線型である．さらに**非退化性**

$$\text{すべての } \boldsymbol{w} \text{ について } \langle\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle=0 \text{ ならば，} \boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$$

があれば，これは $\iota(\boldsymbol{v})=\langle\boldsymbol{v}, \cdot\rangle=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ ($\iota$ の単射性)を意味するから，次元定理より $\iota$ は全射($\therefore$ 全単射)となる．つまり $V$ 自身を $V^\vee$ とみなせる：$\{\langle\boldsymbol{v}, \cdot\rangle \mid \boldsymbol{v}\in V\}=\boldsymbol{V}^\vee$．(内積のときの正値性は無くてよいが，この同型は写像 $\langle\ ,\ \rangle$ によることに注意：なお(27), (28)参照.) □

一般にも $V^\vee$ の元は(座標関数のように) $V$ の元を「測る」ものであり，測るものと測られるものを区別するために双対空間ということばがある．

**補題2** $V$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ に対し，(21)のように

$$\boldsymbol{v}_j^\vee(\boldsymbol{v}_k)=\delta_{j,k} \tag{22}$$

として $\boldsymbol{v}_j^\vee\in V^\vee$ を定めると，$\{\boldsymbol{v}_1^\vee, \cdots, \boldsymbol{v}_n^\vee\}$ は $V^\vee$ の基底となる：これを $\{\boldsymbol{v}_j\}$ に対する**双対基**という．とくに

$$\dim V=\dim V^\vee. \tag{23}$$

**証明** (21)と同様，$\boldsymbol{v}_j^\vee$ は $\boldsymbol{v}=\sum_k \boldsymbol{v}_k x_k$ の第 $j$ 座標 $x_j$ を与える：$x_j=\boldsymbol{v}_j^\vee(\boldsymbol{v})$．$\varphi\in V^\vee$ は線型だから $\xi_j:=\varphi(\boldsymbol{v}_j)$ で決まり，行列表示すれば

$$\varphi(\boldsymbol{v})=\varphi(\boldsymbol{v}_1)x_1+\cdots+\varphi(\boldsymbol{v}_n)x_n \tag{24}$$

$$= [\xi_1, \cdots, \xi_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\xi_1, \cdots, \xi_n]\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^\vee(\boldsymbol{v}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_n^\vee(\boldsymbol{v}) \end{bmatrix}.$$

すなわち $\varphi = \xi_1\boldsymbol{v}_1^\vee + \cdots + \xi_n\boldsymbol{v}_n^\vee$ と書ける．$\{\boldsymbol{v}_j^\vee\}$ の独立性を示すため

$$\xi_1\boldsymbol{v}_1^\vee + \cdots + \xi_n\boldsymbol{v}_n^\vee = \boldsymbol{0}$$

とすれば，すべての $\boldsymbol{v} \in V$ に対し値 $\varphi(\boldsymbol{v})$ が 0．とくに $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_j$ とすれば $\xi_j = (\xi_1\boldsymbol{v}_1^\vee + \cdots + \xi_n\boldsymbol{v}_n^\vee)(\boldsymbol{v}_j) = 0$ $(j = 1, \cdots, n)$ である． □

(20)や(22)のように，$V$ と $V^\vee$ の役割は対称的(**双対的**)である．このことを強調するため，$\varphi(\boldsymbol{v})$ $(\varphi \in V^\vee,\ \boldsymbol{v} \in V)$ を

$$\langle \varphi, \boldsymbol{v} \rangle \tag{25}$$

とも書く．写像 $\langle\ ,\ \rangle : V^\vee \times V \to \boldsymbol{K}$ $(\varphi, \boldsymbol{v} \mapsto \varphi(\boldsymbol{v}))$ を**双対性を表す内積**，または**ペアリング**という．

**例 6** $A \in M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ と $B \in M_{n,m}(\boldsymbol{K})$ に対して

$$\langle A, B \rangle := \mathrm{tr}_m AB = \mathrm{tr}_n BA \in \boldsymbol{K} \tag{26}$$

($\mathrm{tr}_m$ は $m$ 次行列に対するトレース(対角和))とおくと

$$\langle E_{ik}, E_{lj} \rangle = \delta_{kl}\delta_{ij} \qquad (1 \leqq i, j \leqq m,\ 1 \leqq k, l \leqq n).$$

行列単位 $E_{ik}$ と $E_{ki}$ は互いに双対基と見なせ，(26)をペアリングとして一方を他方の双対空間と見なせる：

$$M_{m,n}(\boldsymbol{K})^\vee \cong M_{n,m}(\boldsymbol{K}),\ \ M_{n,m}(\boldsymbol{K})^\vee \cong M_{m,n}(\boldsymbol{K}).$$ □

---

**注意** $V$ と $V^\vee$ は同じ次元(23)ゆえ，基底をとれば同型写像 $V \cong \boldsymbol{K}^n \cong V^\vee$ ができる．ただし基底を各人の勝手に選べるので，できる同型写像にとくべつ標準的な意味はない(たとえば例6では，一方の $E_{ik}$ を $c$ 倍すると双対基は $c^{-1}$ 倍になる．つまり，互いに双対な基底を用いても任意性が残る)．一方 $\varphi \in V^\vee$ に $\boldsymbol{v} \in V$ を代入する操作($\varphi$ を $\boldsymbol{v}$ で評価(evaluate)する，ともいう)

$$\varepsilon_{\boldsymbol{v}}(\varphi) := \varphi(\boldsymbol{v}) \tag{27}$$

は，双対空間の元 $\varphi \in V^\vee$ の1次関数 $\varepsilon_{\boldsymbol{v}} \in (V^\vee)^\vee$ を定める．つまり

$$V \ni \boldsymbol{v} \mapsto \varepsilon_{\boldsymbol{v}} \in (V^\vee)^\vee \tag{28}$$

の対応で $V$ の元を $V^\vee$ 上の関数と見なせる(基底を選ばずに！)．$V$ が有限次元なら，(28)により標準的に(基底によらず) $V \cong (V^\vee)^\vee$ となる．

実際 $\varphi(\boldsymbol{v}) = 0$ $(\forall \varphi \in V^\vee)$ なら $\boldsymbol{v} = 0$．よって(28)の核は0のみなので，$V$ が

有限次元なら $\dim V = \dim V^\vee = \dim(V^\vee)^\vee$ とあわせて(28)は同型写像になる．なお $V$ が無限次元の場合，一般に双対空間はもとの空間より「大きく」なる．

---

**定理 39** $V$ の基底 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ を，行列 $A = [a_{jk}]$ で

$$[\tilde{\boldsymbol{v}}_1, \cdots, \tilde{\boldsymbol{v}}_n] = [\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n]A \tag{29}$$

にとりかえるとき，$\{\tilde{\boldsymbol{v}}_j\}$ の双対基を $\{\tilde{\boldsymbol{v}}_j^\vee\}$ とすれば

$$[\tilde{\boldsymbol{v}}_1^\vee, \cdots, \tilde{\boldsymbol{v}}_n^\vee]\,{}^tA = [\boldsymbol{v}_1^\vee, \cdots, \boldsymbol{v}_n^\vee]. \tag{30}$$

**証明** $A = [a_{jk}]$ として，$\langle \boldsymbol{v}_m^\vee, \tilde{\boldsymbol{v}}_k \rangle$ を計算すると

$$\langle \boldsymbol{v}_m^\vee, \tilde{\boldsymbol{v}}_k \rangle \overset{(29)}{=} \left\langle \boldsymbol{v}_m^\vee, \sum_{j=1}^n \boldsymbol{v}_j a_{jk} \right\rangle = a_{mk}.$$

同じ量を，$\boldsymbol{v}_m^\vee = \sum_{j=1}^n \tilde{\boldsymbol{v}}_j^\vee b_{jm}$ と仮定して計算すると

$$\langle \boldsymbol{v}_m^\vee, \tilde{\boldsymbol{v}}_k^\vee \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \tilde{\boldsymbol{v}}_j^\vee b_{jm}, \tilde{\boldsymbol{v}}_k \right\rangle = b_{km}.$$

よって $b_{km} = a_{mk}$，$B = [b_{kj}] = {}^tA$． □

**例 7** 定理はすでに，偏微係数と微分形式の変換の違いとして知っているはずのこと．$x = x(u, v)$，$y = y(u, v)$ をなめらかな変数変換とし，$\dfrac{\partial x}{\partial u} = x_u$ などと書こう．なめらかな関数 $f$ のテーラー展開を思いだすと

$$f(x, y) - f(a, b) = f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + \cdots$$

であり，右辺の 2 項は $f$ の増分(左辺)の 1 次近似式である．$x-a = dx$，$y-b = dy$ と書くと，$dx$ と $dy$ の(斉次)1 次式

$$z = df = f_x\,dx + f_y\,dy$$

しており，座標によらない意味があると考えられる[3]．ここで $dx, dy$ と偏微分 $\partial_x = \partial/\partial x$，$\partial_y = \partial/\partial y$ について

$$\begin{bmatrix} \partial_x(dx) & \partial_x(dy) \\ \partial_y(dx) & \partial_y(dy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であり，$\{dx, dy\}$ と $\{\partial_x, \partial_y\}$ は双対基の関係(22)にある．

$$dx = x_u du + x_v dv, \qquad dy = y_u du + y_v dv$$

$$\therefore \quad [dx, dy] = [du, dv]\begin{bmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{bmatrix}, \tag{31}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = x_u \frac{\partial f}{\partial x} + y_u \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = x_v \frac{\partial f}{\partial x} + y_v \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_u \\ \partial_v \end{bmatrix}. \tag{32}$$

これら 2 つのチェイン・ルールは，定理 39 の変換則の双対性の例であり，もちろん $\left\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right\}$ と $\{du, dv\}$ が互いに双対基であることによる．(これを用いて計算量を減らせることがある：次ページの問)．これらにより，$df$ についても

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = [dx, dy]\begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{bmatrix}$$

$$\overset{(31)}{=} [du, dv]\begin{bmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{bmatrix}$$

$$\overset{(32)}{=} [du, dv]\begin{bmatrix} \partial_u f \\ \partial_v f \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial u}\,du + \frac{\partial f}{\partial v}\,dv.$$

つまり座標変換によらないことが保証される．□

**注意**　一般に線型写像 $f: V \to W$ と $\psi: W \to \boldsymbol{K}$ (つまり $\psi \in W^\vee$) とを合成すれば，$\psi \circ f$ は $V^\vee$ の元となる：

$$\psi \circ f(\boldsymbol{v}) = \psi(f(\boldsymbol{v})) \qquad (\boldsymbol{v} \in V). \tag{33}$$

$\psi \in W^\vee$ に $\psi \circ f \in V^\vee$ を対応させる写像 $f^\vee: W^\vee \to V^\vee$ を，$f$ の**双対写像**という．(33) を書き換えれば

$$((33)\text{の左辺} =)\langle f^\vee(\psi), \boldsymbol{v}\rangle = \langle \psi, f(\boldsymbol{v})\rangle (= (33)\text{の右辺}) \tag{34}$$

これは $V, W$ が数ベクトル空間なら転置行列の性質であり，$f^\vee$ を ${}^t f$ とも書く．(29) と (30)，(31) と (32) の関係も，一方を他方の双対写像と見るのが自然である．実際，線型写像 $f: V \to V$，$f(\boldsymbol{v}_i) = \tilde{\boldsymbol{v}}_i$ に対し，$g: V^\vee \to V^\vee$ により $\{g(\boldsymbol{v}_i^\vee)\}$ が $\{\tilde{\boldsymbol{v}}_i\}$ の双対基になるとすれば

$$\langle g(\boldsymbol{v}_i^\vee), f(\boldsymbol{v}_j)\rangle = \langle \boldsymbol{v}_i^\vee, \boldsymbol{v}_j\rangle.$$

これは $f^\vee \circ g = id$，$g^{-1} = f^\vee$ を意味する．これが (30) にほかならない．

□

---

$V$ に内積がなくても，部分空間 $U \subset V$ に対し $U^\perp$ が $V^\vee$ の部分空間として定まる：

$$U^\perp := \{\varphi \in V^\vee \mid \varphi(\boldsymbol{u}) = 0 \ (\forall\, \boldsymbol{u} \in U)\}. \tag{35}$$

$U^\perp$ に属す1次関数とは，$U$ の上で0になる「$U$ の定義式」に他ならない．$V$ で定義された1次関数を $U$ の上に制限するとき，$U^\perp$ の分のずれは無視される．これより，同型 $U^\vee \cong V^\vee/U^\perp$ が導かれる．

---

**問** 平面の極座標への変換 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ について，

（i） $$[dx, dy] = [dr, d\theta]\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = [dr, d\theta]\begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\ -y & x \end{bmatrix}$$

を示せ．

（ii） (i)と双対性により，平面上の関数 $f$ について

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\ -\dfrac{y}{r^2} & \dfrac{x}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

でなくてはならない．これを $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{\partial \theta}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ などにより確かめよ．

## 17.4 テンソル積

**定義 30** $V$ と $W$ は同じ体 $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とする．$\boldsymbol{v} \in V$ と $\boldsymbol{w} \in W$ の組に対し，記号

$$\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} \tag{36}$$

を $(k\boldsymbol{v}) \otimes \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \otimes (k\boldsymbol{w})$ $(= k(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w})$ と書く$)$をみたし，次の線型性をもつものとして導入する $(k, k' \in \boldsymbol{K})$：

$$\begin{aligned} (k\boldsymbol{v} + k'\boldsymbol{v}') \otimes \boldsymbol{w} &= k(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) + k'(\boldsymbol{v}' \otimes \boldsymbol{w}), \\ \boldsymbol{v} \otimes (k\boldsymbol{w} + k'\boldsymbol{w}') &= k(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) + k'(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}'). \end{aligned} \tag{37}$$

さらに $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \in V$ が1次独立なら，

$$\sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{v}_j \otimes \boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{0} \quad (j = 1, \cdots, k) \tag{38}$$

であるとし，$\{\boldsymbol{v}_j\}$ と $\{\boldsymbol{w}_j\}$ の役割を替えたときも同様とする．このとき $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$ $(\boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{w} \in W)$ の全体が張るベクトル空間を $V \otimes_{\boldsymbol{K}} W$ または $V \otimes W$ と書き，$V$ と $W$ の($\boldsymbol{K}$ 上の)**テンソル積**(tensor product)とよぶ．

3つ(以上)のベクトル空間 $V_1, V_2, V_3$ のテンソル積 $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ も，同様に定義される． □

線型性(37)は内積に似ている(内積の記号 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ を，値(数)でなく独立の存在とみたのが $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}$ と言えようか．ただし内積の対称性にあたる条件はなく，$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{w}$ なら $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{v}$ である)．内積が基底に対する値できまったように，$\{\boldsymbol{v}_j\}_{j=1,\cdots,n}$，$\{\boldsymbol{w}_k\}_{k=1,\cdots,m}$ をそれぞれ $V, W$ の基底とすれば

$$\boldsymbol{v}_j\otimes\boldsymbol{w}_k \qquad (j=1,\cdots,n,\ \ k=1,\cdots,m) \tag{39}$$

で一般の $V\otimes W$ の元が $\sum c_{jk}\boldsymbol{v}_j\otimes\boldsymbol{w}_k$ と書け，(39)は(38)より独立である．

$$\therefore \quad V\otimes W = \bigoplus_{1\leq j\leq n, 1\leq k\leq m} \boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_j\otimes\boldsymbol{w}_k.$$

とくに $\dim(V\otimes W) = \dim V\cdot\dim W$ である．

また $\varphi$：$V\times W \to U$，$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ が $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ についてそれぞれ線型なら，これが「基底に対する値」を定めると見て，$\varphi$ を $\tilde{\varphi}(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}) = \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ である線型写像 $\tilde{\varphi}$：$V\otimes W \to U$ に一通りに拡張できる(図4)：

$$\tilde{\varphi}\left(\sum_{j,k} c_{jk}\boldsymbol{v}_j\otimes\boldsymbol{w}_k\right) := \sum_{j,k} c_{jk}\varphi(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{w}_k).$$

このことをテンソル積の普遍性(universal property)といい，この性質をもつベクトル空間としても $V\otimes W$ を定義できる．

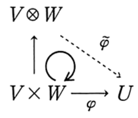



**図4**　テンソル積 $V\otimes W$ の普遍性

**例8(係数拡大)**　複素数の全体 $\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{R}^n$ との，$\boldsymbol{R}$ 上のテンソル積 $\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{R}^n$ を考える．$\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{R}$ ベクトル空間として1と $i$ を基底にもつ2次元空間である．これと $\boldsymbol{R}^n$ の基底 $\boldsymbol{e}_j$ $(j=1,\cdots,n)$ から作った(39)の記号

$$1\otimes\boldsymbol{e}_j, \qquad i\otimes\boldsymbol{e}_j \qquad (j=1,\cdots,n)$$

を基底とする実 $2n$ 次元の空間が，$\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{R}^n$ である：

$$\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{R}^n = \bigoplus_{j=1}^{n} (\boldsymbol{R}\cdot 1\otimes\boldsymbol{e}_j \oplus \boldsymbol{R}\cdot i\otimes\boldsymbol{e}_j). \tag{40}$$

$a(1\otimes\boldsymbol{e}_j)+b(i\otimes\boldsymbol{e}_j)$ を単に $(a+bi)\boldsymbol{e}_j$ と書けば，これは複素数の列ベクトルを考えたのと同じこと．つまり

$$i(1\otimes \boldsymbol{e}_j) := (i\otimes \boldsymbol{e}_j), \qquad i(i\otimes \boldsymbol{e}_j) := -(1\otimes \boldsymbol{e}_j) \tag{41}$$

により(40)のスカラー倍の範囲を複素数に拡大すれば，$\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間として $\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{R}^n \cong \boldsymbol{C}^n$.

一般にも実ベクトル空間 $V = \bigoplus \boldsymbol{R}\boldsymbol{v}_j$ の係数を拡大し $\bigoplus \boldsymbol{C}\boldsymbol{v}_j$ を考えることは，テンソル積 $\boldsymbol{C}\otimes_{\boldsymbol{R}} V$ を考えることにほかならない． □

基底の対応をみれば，次も理解しやすい．

**定理 40**　$U, V, W$ を $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間とするとき，$\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間として以下は自然に(基底のとり方によらず)同型である．

(i)　$V\otimes W \cong W\otimes V$,

(ii)　$(U\otimes V)\otimes W \cong U\otimes(V\otimes W)$,

(iii)　$U\otimes(V\oplus W) \cong (U\otimes V)\oplus(U\otimes W)$,

(iv)　$W\otimes V^\vee \cong \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V, W)$. $\quad$ (42)

**証明**　$\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=1}^{l}$, $\{\boldsymbol{v}_j\}_{j=1}^{m}$, $\{\boldsymbol{w}_k\}_{k=1}^{n}$ を $U, V, W$ の基底とすれば，(i), (ii), (iii)の左辺はそれぞれ $\{\boldsymbol{v}_j\otimes\boldsymbol{w}_k\}$, $\{(\boldsymbol{u}_i\otimes\boldsymbol{v}_j)\otimes\boldsymbol{w}_k\}$, $\{\boldsymbol{u}_i\otimes\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{u}_i\otimes\boldsymbol{w}_k\}$ $(1\leqq i\leqq l,\ 1\leqq j\leqq m,\ 1\leqq k\leqq n)$ を基底とし，右辺も同様である．基底によらない同型写像が，$\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}\mapsto\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{v}$, $(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\otimes\boldsymbol{w}\mapsto\boldsymbol{u}\otimes(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})$, $\boldsymbol{u}\otimes(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\mapsto\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{w}$ により与えられる($\boldsymbol{u}\in U$, $\boldsymbol{v}\in V$, $\boldsymbol{w}\in W$).

(iv)を示すため，まず $\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{v}^\vee\in W\otimes V^\vee$ から線型写像($\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V, W)$ の元) $V\to W$ を次で定める：

$$V\ni\boldsymbol{v}\mapsto\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{v}^\vee(\boldsymbol{v}) := \boldsymbol{w}\cdot\langle\boldsymbol{v}^\vee, \boldsymbol{v}\rangle\in W. \tag{43}$$

これが(42)の同型写像 $W\otimes V^\vee\to\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}(V, W)$ を与える．実際 $\{\boldsymbol{v}_j^\vee\}_{j=1}^{m}\subset V^\vee$ を $\{\boldsymbol{v}_j\}$ の双対基とすれば，上の定義の下で

$$\boldsymbol{w}_k\otimes\boldsymbol{v}_j^\vee(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_k\delta_{ji}$$

これは行列単位 $E_{kj}$ と同じ性質で，任意の $f: V\to W$ は

$$f = \sum_{k,j} f_{kj}\boldsymbol{w}_k\otimes\boldsymbol{v}_j^\vee \qquad (f_{kj} = \langle\boldsymbol{w}_k^\vee, f(\boldsymbol{v}_j)\rangle) \tag{44}$$

と書ける．これが(42)の同型の意味である． □

**問** (44)を確かめよ．

**例 9** (42)でとくに $V=W$ の場合を考えよう．$V$ の基底を $\{\boldsymbol{v}_j\}_{j=1}^n$，その双対基を $\{\boldsymbol{v}_j^\vee\}_{j=1}^n$ とする．一般の元 $\boldsymbol{v}\in V$ を $\boldsymbol{v}=\sum_j x_j\boldsymbol{v}_j$ と書くとき，

$$x_j=\langle \boldsymbol{v}_j^\vee, \boldsymbol{v}\rangle, \qquad x_j\boldsymbol{v}_j=(\boldsymbol{v}_j\otimes \boldsymbol{v}_j^\vee)(\boldsymbol{v}),$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{v}=\sum_j \boldsymbol{v}_j\langle \boldsymbol{v}_j^\vee, \boldsymbol{v}\rangle=\sum_j \boldsymbol{v}_j\otimes \boldsymbol{v}_j^\vee(\boldsymbol{v}) \tag{45}$$

であり，$\boldsymbol{v}_j\otimes \boldsymbol{v}_j^\vee$ は $\boldsymbol{v}_j$ 方向への射影作用素(§ 13.3)である．(45)の左辺を $1\cdot\boldsymbol{v}$ と見て $\boldsymbol{v}$ を省けば，「1 の分解(単位の分解)」を得る：

$$1=\boldsymbol{v}_1\otimes \boldsymbol{v}_1^\vee+\cdots+\boldsymbol{v}_n\otimes \boldsymbol{v}_n^\vee. \tag{46}$$

これらは § 13.3 における(21), (22)にあたる．また線形写像 $f: V\to V$ が与えられ，今の基底 $\boldsymbol{v}_j$ が $f$ の固有値 $\lambda_j$ の固有ベクトルとすれば，同様にして $f$ の対角化表示

$$f=\lambda_1\boldsymbol{v}_1\otimes \boldsymbol{v}_1^\vee+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{v}_n\otimes \boldsymbol{v}_n^\vee. \tag{47}$$

が得られる．これは数ベクトル空間の場合の式(§ 13.3 の(25), (26))をより一般にした式である．

---

$V=\boldsymbol{K}^n$ で $\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{e}_j$，$\boldsymbol{v}_j^\vee=\boldsymbol{e}_j^\vee$ のときを考え，(43)により $\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_j^\vee=E_{jj}$ とみれば，(46)は $E$ (単位行列) $=E_{11}+\cdots+E_{nn}$ という式にほかならない．

---

以上，双対基に $^\vee$ をつけて表した．微分幾何で使われるアインシュタイン流では $\boldsymbol{v}_j^\vee=\boldsymbol{v}^j$ などと書き，一般の元も $\boldsymbol{v}=\sum x^j\boldsymbol{v}_j\in V$，$\varphi=\sum\varphi_j\boldsymbol{v}^j\in V^\vee$ のように表す．他方

$$\boldsymbol{v}_j^\vee=\boldsymbol{v}^j=\langle j|\in V^\vee, \qquad \boldsymbol{v}_j=|j\rangle\in V \tag{48}$$

と書くディラック流も便利である．ブラケット〈 〉の半分ずつの意味で $V^\vee$ の元をブラ・ベクトル，$V$ の元をケット・ベクトルともよぶ．たとえば双対基の性質(22)は

$$\langle j|k\rangle=\delta_{jk} \qquad (\langle \boldsymbol{v}_j^\vee, \boldsymbol{v}_k\rangle=\langle j|k\rangle \text{ と略記した})$$

と書き，「行列単位」(43)も $\otimes$ を略して書く：

$$\boldsymbol{v}_k\otimes \boldsymbol{v}_j^\vee=|k\rangle\langle j|.$$

(44)は，$f_{kj}=\langle k|f(\boldsymbol{v}_j)\rangle=\langle k|f|j\rangle$ であり

$$f=\sum_{k,j}|k\rangle f_{kj}\langle j|=\sum_{k,j}|k\rangle\langle k|f|j\rangle\langle j|$$

と書ける．(46),(47)も次のとおり：

$$1=\sum_j|j\rangle\langle j|,\qquad f=\sum_j|j\rangle\lambda_j\langle j|.$$

$P_j:=|j\rangle\langle j|$ が $\boldsymbol{v}_j$ 成分への射影

$$\boldsymbol{v}=\sum_k|k\rangle x_k\mapsto|j\rangle\langle j|\boldsymbol{v}\rangle=|j\rangle\langle j|\sum_k|k\rangle x_k=|j\rangle x_j$$

であり，また射影作用素の性質(定理28)をみたすことも見やすい：

$$P_jP_k=|j\rangle\langle j||k\rangle\langle k|=|j\rangle\delta_{jk}\langle k|=P_j\delta_{jk}.$$ □

---

**注意**　$N$ 個のベクトル空間のテンソル積も同様に考えられる．$N$ 個がすべて同じ $V$ なら，$V\otimes\cdots\otimes V$ を $V^{\otimes N}$ と記す．$\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{w}$ なら $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}\neq\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{v}$ であり，$V^{\otimes N}$ は $V$ の元の「非可換な」$N$ 次式の全体である．次数についての直和

$$T(V):=\bigoplus_{N=0}^{\infty}V^{\otimes N}\qquad(\text{ただし }V^{\otimes 0}=\boldsymbol{K}\cdot 1)$$

を，$V$ が生成するテンソル代数とよぶ．$T(V)$ には，積が

$$(\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_M)\cdot(\boldsymbol{w}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}_N):=(\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_M)\otimes(\boldsymbol{w}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{w}_N)$$

$(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{w}_j\in V)$で定まる．$T(V)$ は $V$ の元から作った非可換多項式の全体であり，可換な文字 $t_1,\cdots,t_n$ から作った多項式全体 $\boldsymbol{K}[t_1,\cdots,t_n]$ にあたる．

外積代数をはじめ，非可換な代数系は(例3の $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ の構成と同様に)適当な $T(V)$の商空間として考えることができる[4]．これについては以下を参照：

横田一郎『群と表現』裳華房(1973)． □

---

## 道案内

1）例 3 の行列表示は積も保ち，「体としての同型」になる．（行列で書くと，$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ は実数の中での特別な話とも思われてくる.）なお $t^2-2$ を一般の有理数係数の多項式 $p(t)$ にかえた場合，$\boldsymbol{Q}(t)/\boldsymbol{Q}[t]p(t)$ が体になるためには $p$ が有理数の範囲で既約であること（より次数の低い $\boldsymbol{Q}[t]$ の元の積にならない）が必要十分である．

同様にして（任意の）有限体も構成できる．$\boldsymbol{F}_2$ を 2 元体（$1+1=0$．付録 1）とし，$p(t) = 1+t+t^2$ をとる．$\boldsymbol{F}_4 := \boldsymbol{F}_2[t]/(1+t+t^2)\boldsymbol{F}_2[t]$ の元は（$f(t) \in \boldsymbol{F}[t]$ を $p(t)$ で割り $f = gp+r$ とすれば，$r$ は 1 次式ゆえ）1 と $t$ の 1 次結合で，$\boldsymbol{F}_4 = \{a1+bt \mid a, b \in \boldsymbol{F}_2\} = \boldsymbol{F}_2 1 \oplus \boldsymbol{F}_2 t$（$\boldsymbol{F}_2$ 上 2 次元，元は 4 つ）．$t \cdot t = t^2 \equiv -t-1 = t+1 \mod p(t)$ などと計算し次の表を得る：0 以外は逆元をもつことがわかる．

| $+$ | $0$ | $1$ | $t$ | $1+t$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ | $t$ | $1+t$ |
| $1$ | $1$ | $0$ | $1+t$ | $t$ |
| $t$ | $t$ | $1+t$ | $0$ | $1$ |
| $1+t$ | $1+t$ | $t$ | $1$ | $0$ |

| $\times$ | $0$ | $1$ | $t$ | $1+t$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $1$ | $0$ | $1$ | $t$ | $1+t$ |
| $t$ | $0$ | $t$ | $1+t$ | $1$ |
| $1+t$ | $0$ | $1+t$ | $1$ | $t$ |

2）例 4 について：より複雑な，また高い次元の図形の「穴」も同様のとらえ方ができる．また係数 $\boldsymbol{K}$ を体でなく $\boldsymbol{Z}$（整数）にすると，考える図形が「向きをもつか」をとらえることができる．入門書として

河内明夫『線形代数からホモロジーへ』培風館(2000)

を挙げよう．

3）例 7 について：一般の座標変換で「1 次関数」は保たれないから，$dx, dy$ の意味は考え直す必要がある．$dx, dy$ は「接ベクトル」（方向微分）$\partial_x, \partial_y$ の双対基として定義するとよく，「微分形式」とよばれることになる．

4）外積代数は曲った空間上の微積分に必須であるが，本書では定義だけで十分に説明されたとは言えない．幾何的な事情を十分理解するためには

フランダース（岩堀長慶訳）『微分形式の理論』岩波書店(1967)

ダーリング（時田節訳）『微分形式と接続』ピアソン・エデュケーション(2000)

などを見よ．なお外積がはじめて導入された本として次が英訳されている．

H. Grassmann, "*Extension Theory*"（原著ドイツ語 1862），

英訳 L. C. Kannenberg，アメリカ数学会(2000)

## 練習問題

**17-1** （i） $V, W$ を有限次元ベクトル空間，$f: V \to W$ を線型写像とする．次元定理により $V/\mathrm{Ker} f$ と $\mathrm{Im} f$ とは同型(次元が同じ)であるが，この同型を自然に与える写像 $V/\mathrm{Ker} f \xrightarrow{\cong} \mathrm{Im} f$ を $f$ を用いて定義せよ．

（ii）* $W \subset V \subset U$ を部分空間の列とする．$(U/W)/(V/W) \cong U/V$ を示せ．［ヒント：$W$ で割ってさらに $V$ で割ることは，「もっと忘れる」ことである．上の同型は「段々忘れても，はじめからたくさん忘れたのと同じ」という式．］

**17-2*** $V_0, V_1, V_2, \cdots, V_N$ を有限次元ベクトル空間の列とし，(例 4 のように)

$$V_N \xrightarrow{f_N} V_{N-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_2 \xrightarrow{f_2} V_1 \xrightarrow{f_1} V_0 \qquad (☆)$$

と写像の列があり $f_j \circ f_{j+1} = 0$(ゼロ写像，$0(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$) を満たすとする．

（i） $\mathrm{Ker} f_j \supset \mathrm{Im} f_{j+1}$ を示せ．

（ii） (i)より商空間$H_j := \mathrm{Ker} f_j/\mathrm{Im} f_{j+1}$ が考えられる(ただし $f_{N+1} = 0$，$f_0 = 0$ と考え $\mathrm{Im} f_{N+1} = \{\boldsymbol{0}\}$，$\mathrm{Ker} f_0 = V_0$ とする)．このとき次を示せ．

$$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \dim V_n = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \dim H_n \qquad (☆☆)$$

（iii） (ii)の数(☆☆)を列(☆)の**オイラー数**という．例 4 の図形できまる $H_0, H_2$ の場合，左辺 $\dim V_2 - \dim V_1 + \dim V_0$ は (面の数)－(辺の数)＋(頂点の数) にほかならない．これを求めよ．また $H_0, H_1$ の次元を求めて(☆☆)を確かめよ．

**17-3** （i） 列ベクトルの空間 $V = \boldsymbol{R}^2$ の 2 次形式を $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = {}^t\boldsymbol{v} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}$ で定める．これは非退化だが正定値でないことを示せ．また $\boldsymbol{v} \mapsto \langle \boldsymbol{v}, \cdot \rangle$ により $V$ 自身を $\boldsymbol{V}^\vee$ とみると，$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ の双対基は何か？

（ii） $\boldsymbol{R}^n$ の元 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_{n-1} = \boldsymbol{e}_{n-1} - \boldsymbol{e}_n$ を考え，$V$ を $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ が張る部分空間とする．$V$ の内積 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_V = {}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}$ に関する $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}\}$ の双対基 $\{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{n-1}\}$ を求めよ．

**17-4** $V$ は $n$ 次元ベクトル空間で $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ をその基底とする．線型写像 $f: V \to V$ をこの基底で表すときの行列を $A$ とする．$V$ の元の外積を，$\boldsymbol{R}^n$ のとき(§12.4)とまったく同様に $\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ である線型な演算として定める．

$$f(\boldsymbol{v}_1) \wedge f(\boldsymbol{v}_2) \wedge \cdots \wedge f(\boldsymbol{v}_n) = (\det A)\, \boldsymbol{v}_1 \wedge \boldsymbol{v}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_n$$

であることを示せ．

# 18章：ジョルダン標準形

正方行列は一般に対角化できるとは限らないが，三角化はつねに可能だった(13章)．これを精密にするのがジョルダン標準形である．定数係数線型常微分方程式の，特性根が重根の場合を手掛りにしよう．

## 18.1　目標の定理

**定理 41**(**定理 29 再掲**)　$n$ 次の複素正方行列 $A$ は，適当な複素可逆行列 $X$ で以下の**ジョルダン標準形**に変形される．

$$X^{-1}AX=\begin{bmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & J_{m_k}(\lambda_k) \end{bmatrix} \tag{1}$$

ただし $J_m(\lambda)$ は次の $m$ 次行列で，**ジョルダン細胞**(ブロック)とよばれる．

$$J_m(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & O \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \lambda \end{bmatrix}_{m\times m} \tag{2}$$

ジョルダン標準形(1)は，$J_{m_j}(\lambda_j)$ の並べ方を除き $A$ で一通りに定まる[1)]．

□

$J_{m_j}(\lambda_j)$ がすべて1行1列($m_j=1$)のときが $A$ が対角化可能のときである．一般にも(1)の右辺の形にするとき，$\lambda_j$ は固有多項式の根である：$P^{-1}AP-\lambda_jE$ は対角線に0が現れる三角行列ゆえ

$$|A-\lambda_jE|=|P^{-1}AP-\lambda_jE|=0. \tag{3}$$

**例 1**　$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ の固有多項式は

$$|t-A|=t^3-t^2-t+1=(t+1)(t-1)^2. \tag{4}$$

対角化には固有ベクトルからなる基底が必要だった．

$$(A+1E)\boldsymbol{v}_- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{v}_- = \mathbf{0} \qquad (5)$$

より，固有値 $-1$ の固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_- = {}^t[1, -2, 1]$ のスカラー倍(1次元)．固有値1のものも1次元のみであり

$$(A-1E)\boldsymbol{v}_+ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{v}_+ = \mathbf{0}$$

より $\boldsymbol{v}_+ = {}^t[-1, 0, 1]$．よって対角化できないが

$$(A-1E)\tilde{\boldsymbol{v}}_+ = \boldsymbol{v}_+ \qquad (6)$$

となる $\tilde{\boldsymbol{v}}_+ = {}^t[1, 1, 0]$ をとれる．(ここで(6)は非斉次型ゆえ，$\tilde{\boldsymbol{v}}_+$ は斉次解 $\boldsymbol{v}_+$ の分だけきまらない．) $X := [\boldsymbol{v}_-, \boldsymbol{v}_+, \tilde{\boldsymbol{v}}_+] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ は可逆で，これにより $A$ をジョルダン標準形にできる：

$$AX = [-\boldsymbol{v}_-, \boldsymbol{v}_+, \boldsymbol{v}_+ + \tilde{\boldsymbol{v}}_+] = [\boldsymbol{v}_-, \boldsymbol{v}_+, \tilde{\boldsymbol{v}}_+] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\therefore \quad X^{-1}AX = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1(-1) & O \\ O & J_2(1) \end{bmatrix}.$$

□

**問**　例1の計算を確かめよ．

## 18.2　定数係数線型常微分方程式再論

**例2**　同種の問題として，次の斉次型方程式を考えよう．

$$\partial^3 u - \partial^2 u - \partial u + u = 0 \qquad \left(\partial = \frac{d}{dt}\right). \qquad (7)$$

左辺を $Lu$ と書けば

$$Lu = (\partial^2-1)(\partial-1)u = (\partial+1)(\partial-1)^2 u.$$

方程式 $(\partial+1)u = 0$ は解 $Ce^{-t}$ をもつ．重根があるので

$$(\partial-1)^2 u = 0 \qquad (8)$$

の一般解が問題だが，小さいパラメータ $\varepsilon$ を入れると

$$(\partial-1)(\partial-(1+\varepsilon))u = 0$$

は解 $e^t, e^{(1+\varepsilon)t}$ をもつ．$e^{(1+\varepsilon)t} \to e^t$ $(\varepsilon \to 0)$ だが

$$\frac{1}{\varepsilon}\{e^{(1+\varepsilon)t} - e^t\} \longrightarrow te^t. \tag{9}$$

と差の極限がとれる(4章)．そしてたしかに

$$(\partial-1)(te^t) = e^t, \qquad (\partial-1)e^t = 0 \tag{10}$$

である．(6)と比べれば，$te^t$ が $\tilde{\boldsymbol{v}}_+$ にあたるわけである．

3つの解 $e^{-t}, e^t, te^t$ は1次独立であり，

$$u(t) = C_1e^{-t} + C_2e^t + C_3te^t \qquad (C_i \text{ は任意})$$

が(7)の一般解を与える：$\mathrm{Ker}\, L = \boldsymbol{C}e^{-t} \oplus \boldsymbol{C}e^t \oplus \boldsymbol{C}te^t$. □

重複度が大きいと，極限操作では面倒である．

$$(\partial-\lambda)^m u = 0 \tag{11}$$

を解くため，解 $e^{\lambda t}$ との比を考えよう(定数変化法)．

$$u(t) = e^{\lambda t}v(t)$$

とすると $\partial u(t) = \lambda e^{\lambda t}v(t) + e^{\lambda t}v'(t)$．移項して

$$(\partial-\lambda)e^{\lambda t}v(t) = e^{\lambda t}v'(t) \tag{12}$$

$$\therefore \quad (\partial-\lambda)^2 e^{\lambda t}v(t) = (\partial-\lambda)e^{\lambda t}v'(t) = e^{\lambda t}v''(t).$$

帰納法により($m$ 階微分を $\partial^m v = v^{(m)}$ と書くと)

$$(\partial-\lambda)^m e^{\lambda t}v(t) = e^{\lambda t}v^{(m)}(t) \tag{13}$$

となる．よって(11) $\Leftrightarrow v^{(m)}(t) = 0$ であり，$m$ 個の独立な解

$$u(t) = e^{\lambda t},\ te^{\lambda t},\ t^2e^{\lambda t},\ \cdots,\ t^{m-1}e^{\lambda t}$$

を得る．これを各特性根について考えれば：

**定理 42**　$\lambda_1, \cdots, \lambda_l \in \boldsymbol{C}$ は相異なるとする．方程式

$$(\partial-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\partial-\lambda_l)^{m_l}u = 0 \tag{14}$$

$(m_j \geqq 1)$ の解空間の基底は，次で与えられる．

$$e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t},\ \cdots,\ t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t}\ ;\ \cdots\ ;\ e^{\lambda_l t},\ te^{\lambda_l t},\ \cdots,\ t^{m_l-1}e^{\lambda_l t}.$$ □

**例 3**　上の考察を行列で言い換える．方程式(7)は

$$\frac{d}{dt}[u, u', u''] = [u, u', u'']\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

と書け，この行列は例1の $A$ である．先ほどは

$$u = C_1 u_- + C_2 u_+ + C_3 \tilde{u}_+,$$
$$(\partial+1)\,u_- = 0, \qquad (\partial-1)\,u_+ = 0, \qquad (\partial-1)\,\tilde{u}_+ = u_+ \tag{16}$$

と分解し $[u_-, u_+, \tilde{u}_+] = [e^{-t}, e^t, te^t]$ を得た(例2)．(16)は

$$(\partial-1)[u_+, \tilde{u}_+] = [u_+, \tilde{u}_+]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と書け，$u_-$ とあわせれば例1の標準形が現れる：

$$\partial[u_-, u_+, \tilde{u}_+] = [u_-, u_+, \tilde{u}_+]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

これはもちろん偶然ではない．解を具体的に求めなくても，以下のように(15)を(16), (17)に書き直せる[2)]．13章の補間多項式のアイディアにより

$$1 = \frac{(\partial-1)^2 - (\partial-1)(\partial+1) + 2(\partial+1)}{4} \tag{18}$$

$$\therefore \quad u = \frac{1}{4}\{(\partial-1)^2 u - (\partial-1)(\partial+1)\,u + 2(\partial+1)\,u\}.$$

そこで順に

$$u_- := \frac{1}{4}(\partial-1)^2 u = \frac{1}{4}(u'' - 2u' + u),$$

$$u_+ := \frac{-1}{4}(\partial-1)(\partial+1)\,u = \frac{-1}{4}(u'' - u),$$

$$\tilde{u}_+ := \frac{1}{2}(\partial+1)\,u = \frac{1}{2}(u' + u)$$

とおくと，$u \in \operatorname{Ker} L$ ならば，

$$(\partial+1)\,u_- = 0, \qquad (\partial-1)\,u_+ = 0, \qquad (\partial-1)^2\,\tilde{u}_+ = 0$$

である．また

$$(\partial-1)\,\tilde{u}_+ = \frac{(\partial-1)(\partial+1)}{2}\,u = -2u_+$$

であり，あらためて $-\dfrac{1}{2}\,\tilde{u}_+ = \dfrac{\partial+1}{4}\,u$ を $\tilde{u}_+$ とすれば ($u = u_- + u_+ - 2\tilde{u}_+$),

$$(\partial-1)\,\tilde{u}_+ = u_+$$

となる．こうして(16)の関係式が得られ，書き換えれば(17)を得る．

$$[u_-,\, u_+,\, \tilde{u}_+] = \frac{1}{4}[u''-2u'+u,\, u''-u,\, u'+u]$$

$$= \frac{1}{4}[u,\, u',\, u'']\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

であるから，例1の $X$ も再度得られた．(17)を書き換えると

$$\partial([u,\, u',\, u'']X) = ([u,\, u',\, u'']X)\begin{bmatrix} J_1(-1) & 0 \\ 0 & J_2(1) \end{bmatrix}.$$

となるが，(15)を用いれば

$$(\partial[u,\, u',\, u''])X = [u,\, u',\, u'']AX$$

でもある．一般の解 $u$ に対し $u, u', u''$ は1次独立となるので，これらを比較して

$$AX = X\begin{bmatrix} J_1(-1) & 0 \\ 0 & J_2(1) \end{bmatrix} \qquad \therefore \quad X^{-1}AX = \begin{bmatrix} J_1(-1) & 0 \\ 0 & J_2(1) \end{bmatrix}$$

すなわち，$A$ のジョルダン標準形が再び得られた． □

斉次型方程式を(15)の形に書き換えるときの行列 $A$ をコンパニオン行列とよんだ((32)右辺；§14.4)．定理42は(15)を(17)の形にできることと言えるから

**定理42′** コンパニオン型行列 $A$ はジョルダン標準形(1)にできる． □

---

**注意** 逆に(17)のように $A$ をジョルダン標準形にすれば，その指数関数を計算して定理42の解が復元できる(例8)．つまり定理42 ⇔ 定理42′．

---

**問** 3次行列 $A$ はパラメータ $\varepsilon$ をもち，その特性根は $\lambda+\varepsilon, \lambda, \lambda-\varepsilon$ であるとする．また固有ベクトル $\boldsymbol{u}_{\lambda+\varepsilon}, \boldsymbol{u}_{\lambda-\varepsilon}, \boldsymbol{u}_\lambda$ は $\varepsilon\to 0$ ですべて $\boldsymbol{u}$ となり，さらに $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{\lambda+\varepsilon}-\boldsymbol{u}_\lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(u_\lambda-u_{\lambda-\varepsilon})\,(=\boldsymbol{u}')$ とする．このとき $\boldsymbol{u}'' = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{\boldsymbol{u}_{\lambda+\varepsilon}-\boldsymbol{u}_\lambda}{\varepsilon}-\frac{\boldsymbol{u}_\lambda-\boldsymbol{u}_{\lambda-\varepsilon}}{\varepsilon}\right)$ があれば次が成り立つことを示せ：

$$A[\boldsymbol{u}'', \boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{u}'', \boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}]\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

## 18.3 単因子と標準形：例

一般の $A$ もコンパニオン型行列に「分解」すれば，定理 41 の標準形にできる．そこで基本変形を拡張しよう．行(または列)の入れ換え，ある行(列)の $k$ 倍，ある行(列)の $a$ 倍を他の行(列)に加える，の繰り返しが基本変形で，8 章の記号では各々

$$C_{ij}\text{ 倍}, \quad D_i(a)\text{ 倍}\,(a \neq 0), \quad E_{ij}(a)\text{ 倍} \tag{19}$$

である．以下では $E_{ij}(a)$ 倍を $a \in \boldsymbol{K}[t]$($\boldsymbol{K}$ 係数多項式)まで許し，**多項式の範囲での基本変形**とよぼう．

**定義 31**　$A \in M_{n,n}(\boldsymbol{K})$ とし，$t$ を文字とする．$A-t = A-tE$ に左右から多項式の範囲での基本変形を行い，次の形にできる．

$$P(t)(A-t)Q(t) = \begin{bmatrix} d_1(t) & & O \\ & \ddots & \\ O & & d_n(t) \end{bmatrix} \tag{20}$$

ここで $d_k$ は多項式で，$d_{k+1}$ を割り切る(商も多項式)．多項式の組($d_1, \cdots, d_n$)を $A-t$ の**単因子**という． □

---

**注意 1**　より一般に，$A$ が多項式を成分とする長方行列でも同様である．証明はしないが以下の例で納得されたい．(19)の積として，変形に用いる $P(t)$, $Q(t)$ の行列式は(多項式でなく)数≠0 である(したがって，$|A-t| = d_1(t) \cdots d_n(t) \times c$, $0 \neq c \in \boldsymbol{K}$)．なお，$d_k$ も $0 \neq c \in \boldsymbol{K}$ 倍だけきまらない．

---

単因子は階数標準形と同様にして求められる．行(列)変形は $A$ の横(縦)に単位行列を並べて記録できた．

**例 4**　$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ のとき．単位行列を補った

$$\begin{bmatrix} E & A-t \\ O & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-t & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3-t & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1-t \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & O & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を変形する．第4列と第6列(＝$A-t$ の第1列と第3列)を入れ換えて

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1-t \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3-t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-t & 2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & O & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第4列の1倍，$-1+t$ 倍を第5列，第6列に加えて

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1-t & 2-2t \\ 0 & 0 & 1 & -1-t & 1-t & 1-t^2 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & O & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 1 & t-1 \end{bmatrix}$$

同様に第1行を使って，第2, 3行をはき出す．

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1-t & 2-2t \\ 1+t & 0 & 1 & 0 & 1-t & 1-t^2 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & O & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 1 & t-1 \end{bmatrix}$$

第5列の $-2$ 倍を第6列に加えると

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1-t & 0 \\ 1+t & 0 & 1 & 0 & 1-t & -1+2t-t^2 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & O & & 0 & 1 & -2 \\ & & & 1 & 1 & t-3 \end{bmatrix}$$

最後に第2行を第3行から引けば

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1-t & 0 \\ -1+t & -1 & 1 & 0 & 0 & (1-t)^2 \\ & & & 0 & 0 & -1 \\ & O & & 0 & 1 & 2 \\ & & & 1 & 1 & 3-t \end{bmatrix}$$

これを $\begin{bmatrix} P(t) & R(t) \\ O & Q(t) \end{bmatrix}$ と書けば，左上，右下の 3×3 部分 $P(t), Q(t)$ が各々行変形，列変形を表す：

$$P(t)(A-t)Q(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ t-1 & -1 & 1 \end{bmatrix}(A-tE)\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3-t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & (1-t)^2 \end{bmatrix} = R(t). \qquad (21)$$

$P(t), Q(t)$ は基本変形を表すから多項式の範囲で可逆であり，実際

$$P(t)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1-t & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad Q(t)^{-1} = \begin{bmatrix} 1-t & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (22)$$

である．よって $A$ の単因子は(定数倍を除き)

$$d_1 = 1, \qquad d_2 = 1-t, \qquad d_3 = (1-t)^2. \qquad \square$$

---

**注意 2**　一般に $d_1$ は $A-t$ の各成分の最大公約因子にできる．(たとえば，成分がすべて$(t-1)$の何倍かだと，基本変形でできる成分も$(t-1)$でわれる．このとき$(t-1)$が最大公約因子なら，必ずこれを基本変形で(1, 1)成分に作れて，$d_1$ を与える．なお，これを $d_1^{-1}$ 倍して 1 にしないのは「多項式の範囲での基本変形」であるからで，定数($\neq 0$)以外の多項式による除法は許さないためである．(これはあとで $t$ に $A$ を代入する操作をしたいからである.)　はき出し法でほかの第 1 行と第 1 列は 0 にでき，残った 0 でない成分はすべてこの最大公約因子でわれる．よって $d_2$ は $d_1$ でわれ，以下同様となる．$\square$

---

上の変形と標準形との関係を説明しよう．

$$P(t)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とみる($t$ に行列 $A$ を代入することは，次節で言えば「ベクトルに $t=A$ を掛ける」にほかならない．そこで $t$ を左におく)．$t$ に $A$ を代入し

$$P^{-1}(A) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - A\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= [\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{p}_2', \boldsymbol{p}_3']$$

とおく($\boldsymbol{p}_1' = \boldsymbol{0}$ であり，$P^{-1}(A)$ は可逆でない．$P^{-1}(A)$ は「$P(t)^{-1} = P^{-1}$ に $t=A$ を代入した」のつもりである)．すると $\boldsymbol{p}_2', \boldsymbol{p}_3'$ は次をみたす：

$$(A-1)\,\boldsymbol{p}_2' = \boldsymbol{0}, \tag{23}$$
$$(A-1)\,\boldsymbol{p}_3' \neq \boldsymbol{0}, \qquad (A-1)^2\boldsymbol{p}_3' = \boldsymbol{0}. \tag{24}$$

実際(23)は $(A-1)\,\boldsymbol{p}_2' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$ として，また(24)も

$$(A-1)\,\boldsymbol{p}_3' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

と確かめられる．(23), (24)を行列の形にまとめれば

$$(A-1)[\boldsymbol{p}_2', (A-1)\,\boldsymbol{p}_3', \boldsymbol{p}_3'] = [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, (A-1)\,\boldsymbol{p}_3']$$
$$= [\boldsymbol{p}_2', (A-1)\,\boldsymbol{p}_3', \boldsymbol{p}_3']\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって $X := [\boldsymbol{p}_2', (A-1)\,\boldsymbol{p}_3', \boldsymbol{p}_3']$ とおけば，(単位行列1を移項し)

$$AX = X\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

である．$X$ は可逆で，$X^{-1}AX$ が $A$ の標準形を与える．

**問**　$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ とする．$A-tE$ の単因子を求めよ．

## 18.4　単因子と標準形：一般のとき

(23), (24) で単因子の式 $A-1$, $(A-1)^2$ が現れた由来を考えよう．一般に正方行列 $A \in M_{n,n}(\boldsymbol{K})$ があると，$A^2, A^3, \cdots$ も($A$ の多項式も) $V = \boldsymbol{K}^n$ の元に「作用する」(すなわち，左から掛けることができる)．例 4 の場合，(23), (24) より $(A-1)^2$ は $O$ で作用している．あとで $t$ に $A$ を代入するつもりで，$t$ の多項式が並んだベクトルの全体

$$V[t] := \{\boldsymbol{w}(t) = {}^t[f_1(t), \cdots, f_n(t)] \mid f_j \in \boldsymbol{K}[t]\}$$

を考えよう．$\boldsymbol{w}(t) \in V[t]$ は，$t$ のベキを左に整理し

$$\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{w}_0 + t\boldsymbol{w}_1 + \cdots + t^m \boldsymbol{w}_m \qquad (\boldsymbol{w}_j \in V) \tag{25}$$

と書けて，文字 $t$ を行列 $A$ でおきかえ

$$\boldsymbol{w}(t) \mapsto \boldsymbol{w}(A) := \boldsymbol{w}_0 + A\boldsymbol{w}_1 + \cdots + A^m \boldsymbol{w}_m \tag{26}$$

を得る．この写像を $\pi_A : V[t] \to V$ としよう．

$\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{w}_0$ (0 次式)のときを考えれば $\pi_A(V[t]) = V$．また，$\boldsymbol{w}(t) = (A-t)\boldsymbol{v}(t)$ なら $\boldsymbol{w}(A) = (A-A)\boldsymbol{v}(A) = \boldsymbol{0}$ である．

$$\therefore \quad \mathrm{Im}(A-t)\,(= (A-t)\,V[t]) \subset \mathrm{Ker}\,\pi_A. \tag{27}$$

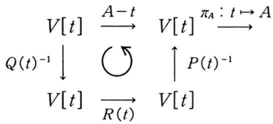
この事実が鍵である．例 4 の場合 ($Q(t)^{-1}V[t] = V[t]$ に注意すると)

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(A-t) &\overset{(21)}{=} \mathrm{Im}\,P(t)^{-1}R(t)Q(t)^{-1} = \mathrm{Im}P(t)^{-1}R(t) \\ &= \mathrm{Im}\,[\boldsymbol{p}_1'(t), (1-t)\boldsymbol{p}_2'(t), (1-t)^2\boldsymbol{p}_3'(t)]\end{aligned}$$

($P(t)^{-1} = [\boldsymbol{p}_1'(t), \boldsymbol{p}_2'(t), \boldsymbol{p}_3'(t)]$ と書いた)だから，(27) は

$$\boldsymbol{p}_1'(A) = (1-A)\boldsymbol{p}_2'(A) = (1-A)^2\boldsymbol{p}_3'(A) = \boldsymbol{0}$$

を意味する．これが(23), (24)の由来である．




**可換図式 1**　中央の印は，$A-t$ と「まわり道」$P(t)^{-1}R(t)Q(t)^{-1}$ が等しいこと((21)式)を示す．

一般にも $P(t)^{-1} = [\boldsymbol{p}_1'(t), \cdots, \boldsymbol{p}_n'(t)]$ とし，

$$P^{-1}(A) = P(t)^{-1}|_{t=A} = [\boldsymbol{p}_1'(A), \cdots, \boldsymbol{p}_n'(A)] \tag{28}$$

($t = A$ は左に！)を作れば，同様に

$$d_1(A)\boldsymbol{p}'_1(A) = \cdots = d_n(A)\boldsymbol{p}'_n(A) = \mathbf{0}. \tag{29}$$

---

**注意** ここで $d_j$ が 0 次式($k \neq 0$)なら，対応する $\boldsymbol{p}'_j(A)$ は($k$ 倍が $\mathbf{0}$ なので) $\mathbf{0}$ である：先ほどの $\boldsymbol{p}'_1(A)$ と同様．よって $P^{-1}(A)$ は $d_1 =$ 定数 ($\neq 0$)なら可逆でない($P^{-1}(A) \neq P(A)^{-1}$)．

---

そして，$\mathrm{Ker}\,\pi_A$ は($= A$ を代入して $\mathbf{0}$ になる関係式は)これで尽きる：

**補題** $\mathrm{Im}(A-t) = \mathrm{Ker}\,\pi_A$.

**証明** 「⊃」が問題 (∵(27)式)．$\boldsymbol{w}(t) \in \mathrm{Ker}\,\pi_A$ のとき，$\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{w}_0 + t\boldsymbol{w}_1 + \cdots + t^m\boldsymbol{w}_m$ とすれば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}(t) &= \boldsymbol{w}_0 + A\boldsymbol{w}_1 + \cdots + A^m\boldsymbol{w}_m + (t-A)\boldsymbol{w}_1 + \cdots + (t^m - A^m)\boldsymbol{w}_m \\ &\in \boldsymbol{w}_0 + A\boldsymbol{w}_1 + \cdots + A^m\boldsymbol{w}_m + \mathrm{Im}(A-t).\end{aligned}$$

よって条件 $\boldsymbol{w}(A) = \mathbf{0}$ より $\boldsymbol{w}(t) \in \mathrm{Im}(A-t)$ である． □

**例 5** $A$ の単因子型が次の形のときを考えよう．

$$P(t)(A-t)Q(t) = \begin{bmatrix} 1 & & & O \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ O & & & d(t) \end{bmatrix}$$

($A$ の特性根が相異なればこの形：実際，$d_k$ が $d_{k+1}$ を割るので $d_1 = \cdots = d_{n-1} = 1$．また，$d(t) = |A-t|\cdot$定数である：§18.3 注意 1 参照．)

$\boldsymbol{p}'_1(A) = \cdots = \boldsymbol{p}'_{n-1}(A) = \mathbf{0}$ であり，$\boldsymbol{p}'_n(A) = \boldsymbol{v}$ は

$$d(A)\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \tag{30}$$

をみたす．すなわち，$d(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_0$ とすれば

$$A^n\boldsymbol{v} + c_{n-1}A^{n-1}\boldsymbol{v} + \cdots + c_0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}.$$

補題より，これより低次の関係式($c_1A\boldsymbol{v} + c_0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ のような)はなく

$$\boldsymbol{v},\ A\boldsymbol{v},\ A^2\boldsymbol{v},\ \cdots,\ A^{n-1}\boldsymbol{v} \tag{31}$$

は 1 次独立である．これらを基底にとれば

$$A[\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}, \cdots, A^{n-1}\boldsymbol{v}] = [A\boldsymbol{v}, A^2\boldsymbol{v}, \cdots, A^n\boldsymbol{v}]$$

$$= [\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}, \cdots, A^{n-1}\boldsymbol{v}]\begin{bmatrix} 0 & & & O & -c_0 \\ 1 & 0 & & & -c_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & -c_{n-2} \\ O & & & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix} \tag{32}$$

つまり，$A$ はコンパニオン型行列に変形できる． □

**定理 43**　任意の $A \in M_{n,n}(\boldsymbol{K})$ はコンパニオン型行列 $C_1, \cdots, C_l$ に分解できる：$X \in GL_n(\boldsymbol{K})$ があって，

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} C_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & C_l \end{bmatrix} = \mathrm{diag}[C_1, \cdots, C_l].$$

---

**注意**　証明で見るように，これには基本変形で単因子を求めるだけでよく，高次の代数方程式を解く必要がない．よって $X$ の成分は，もとの $A$ と同じ範囲である（$A \in M_{n,n}(\boldsymbol{K})$ なら，$X \in GL_n(\boldsymbol{K})$）．上の形を $A$ の**有理標準形**という．

---

**証明**　例 5 と同様に考える．(20) の変形で $d_1, \cdots, d_n$ のはじめに何個か 1 が現れるから，これをあらためて

$$P(t)(A-t)Q(t) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & O \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \delta_1(t) & & \\ & & & & \ddots & \\ O & & & & & \delta_l(t) \end{bmatrix}$$

としよう．両辺の行列式をとれば，注意 1 より

$$|A-t| = c\delta_1(t)\cdots\delta_l(t) \qquad (c \neq 0) \tag{33}$$

である．$P^{-1}(A) = [\boldsymbol{p}_1'(A), \cdots, \boldsymbol{p}_n'(A)]$ (28) もはじめの $n-l$ 個は $\boldsymbol{0}$ に等しいから，これも

$$P^{-1}(A) = [\boldsymbol{0}, \cdots, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_l]$$

と書こう．$\boldsymbol{v}_j$ は $\delta_j(A)\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}$ をみたす．これは

$$A^{n_j}\boldsymbol{v}_j = c_{j,0}\boldsymbol{v}_j + c_{j,1}A\boldsymbol{v}_j + \cdots + c_{j,n_j-1}A^{n_j-1}\boldsymbol{v}_j$$
$$(n_j = \text{多項式 } \delta_j(t) \text{ の次数}) \tag{34}$$

の形の関係式で，これより低い次数の関係式はない．

$$\boldsymbol{v}_j,\quad A\boldsymbol{v}_j,\quad A^2\boldsymbol{v}_j,\quad \cdots,\quad A^{n_j-1}\boldsymbol{v}_j \tag{35}$$

は(31)と同じく1次独立である．これらが張る $V$ の部分空間を $V_j$ と書こう．各 $V_j$ では(34)より $A(V_j)\subset V_j$ ($\boldsymbol{v}\in V_j$ ならば $A\boldsymbol{v}\in V_j$)であり

$$A[\boldsymbol{v}_j, A\boldsymbol{v}_j, \cdots, A^{n_j-1}\boldsymbol{v}_j] = [\boldsymbol{v}_j, A\boldsymbol{v}_j, \cdots, A^{n_j-1}\boldsymbol{v}_j]C_j$$

$$\left(C_j = \begin{bmatrix} 0 & & & O & c_{j,0} \\ 1 & 0 & & & c_{j,1} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & c_{j,n_j-2} \\ O & & & 1 & c_{j,n_j-1} \end{bmatrix}\right).$$

(33)より $n_1+\cdots+n_l = n$ だから，(35)を各 $j$ について集めると $V=\boldsymbol{K}^n$ の基底になるだろう．これも補題より保証され(下記)，$V = V_1\oplus\cdots\oplus V_l$．各 $V_j$ に(35)の基底をとれば，$A$ は $\mathrm{diag}[C_1, \cdots, C_l]$ で表される．

---

**$V = V_1\oplus\cdots\oplus V_l$ の証明**　異なる $j$ の間に従属関係式 $f_1(A)\boldsymbol{v}_1+\cdots+f_l(A)\boldsymbol{v}_l = \boldsymbol{0}$ があったとする(多項式 $f_j$ は $\deg f_j < n_j$ としてよい)．これは

$$f_1(t)\boldsymbol{p}'_{n-l+1}(t)+\cdots+f_l(t)\boldsymbol{p}'_n(t)\in \mathrm{Ker}\,\pi_A = (A-t)V[t]$$

ということ．$P(t)[\boldsymbol{p}'_1(t), \cdots, \boldsymbol{p}'_n(t)] = PP^{-1} = E$ を用いれば

$${}^t[0, \cdots, 0, f_1(t), \cdots, f_l(t)]\in P(t)(A-t)V[t] = R(t)V[t].$$

次数の条件より，これは $f_1=\cdots=f_l=0$ を意味する．□

---

**系1(定理41)**　コンパニオン型行列 $C_j$ をジョルダン標準形にすれば，一般の行列 $A$ の標準化を得る．各 $C_j$ を標準形にすると，異なる $\lambda$ のジョルダン細胞 $J_m(\lambda_j)$ (2)が $d_j$ における重複度だけ(定理42と同様に)生じる．

□

有名な**ケーリー-ハミルトンの定理**も，今や当たり前である：

**系2(定理27再掲)**　$p_A(t) = |t-A|$ を $A$ の固有多項式とすれば

$$p_A(A) = O. \tag{36}$$

**証明**　$d_n(A) = O$ で，$d_n$ は $p_A$ を割り切るから．

**別証**：$p_A(X^{-1}AX)=O$ を言えばよいから，(1)の右辺の形で考える．$p_A(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_k)^{m_k}$ とすれば，現れる $J_m(\lambda_j)$ について $m \leqq m_j$．よって $(J_m(\lambda_j)-\lambda_j)^{m_j}=O$ であり，$p_A(X^{-1}AX)=O$．

**注意**　$n$ 次行列の全体は $n^2$ 次元なので，$E, A, A^2, \cdots$ はいずれ1次独立でなくなる：$c_0E+c_1A+c_2A^2+\cdots+c_NA^N=O$．($A$ をある多項式に代入すると $O$.) こうした多項式のうち，次数最小の**最小多項式**が定数倍を除き(または「最高次の係数＝1」により)定まる(次数が同じで異なるものがあると，差をとって低い次数のものができてしまう：練習問題13-3略解)．単因子を $d_1, \cdots, d_n$ とすれば，$j=n$ のとき $d_n(A)=O$ である．よって最小多項式 $\mu(t)$ は $d_n(t)$ を割り切るが，定理43の形で考えると $\mu(C_n)=O$ が必要だから両者は同じ次数．∴ $\mu(t)=d_n(t)$．

**例6**　(1)　2次行列のジョルダン標準形は二通りある(以下，空欄の成分は0としよう)：

$$\begin{bmatrix} \kappa & \\ & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{単因子型は}(1, (t-\kappa)(t-\lambda))\text{，または}((t-\lambda), (t-\lambda))\ (\kappa=\lambda\text{ のとき})$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{単因子型は}(1, (t-\lambda)^2).$$

対角化可能の場合も，単因子型でみると $\lambda=\mu$ かどうかで分離されることがわかる．また単因子は次々と因子が増え，積をとると固有多項式になるから，許される型は限定される．

(2)　3次行列では三通りある：行列の右側に単因子型を示す．

$$\begin{bmatrix} \kappa & & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} (1, 1, (t-\kappa)(t-\lambda)(t-\mu))\text{，または} & \\ (1, (t-\lambda), (t-\lambda)(t-\mu)) & (\kappa=\lambda), \\ ((t-\lambda), (t-\lambda), (t-\lambda)) & (\kappa=\lambda=\mu) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \kappa & & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} (1, 1, (t-\kappa)(t-\lambda)^2) & (\kappa \neq \lambda) \\ (1, (t-\lambda), (t-\lambda)^2) & (\kappa=\lambda) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{bmatrix} \quad (1, 1, (t-\lambda)^3)$$

□

4次以上でも同様である．なお，$A-t$ を左右から多項式の範囲で基本変形した結果が対角になれば，(次々にわり切らなくても)標準形の情報を

与える(練習問題 18-5).

**例 7**　$A=\begin{bmatrix}-6&-1&-2&3\\8&1&4&-4\\0&0&-1&0\\-7&-1&-2&4\end{bmatrix}$ のとき.

$$P(t)=\begin{bmatrix}2&0&0&-1\\1&0&0&-1\\0&0&1&0\\2t-1&-1&-2&-t\end{bmatrix},\quad Q(t)=\begin{bmatrix}0&1&0&-1\\-1&-1&2&t+3\\0&0&1&0\\0&2&0&-1\end{bmatrix}$$

により，$A-tE$ を次の形にできる：

$$P(t)(A-t)Q(t)=\begin{bmatrix}1&&&O\\&t-1&&\\&&t+1&\\O&&&(t+1)^2\end{bmatrix}.$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&-2&-1\\0&0&1&0\\1&-2&0&0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$ に $A$ を代入すると

$$P^{-1}(A)=[\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_3',\boldsymbol{p}_4']=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\0&1&-2&-1\\0&0&1&0\\0&-2&0&0\end{bmatrix}$$

となり，$P(t)(A-t)Q(t)$ の形にしたがい

$$\boldsymbol{p}_1'=(A-1)\boldsymbol{p}_2'=(A+1)\boldsymbol{p}_3'=(A+1)^2\boldsymbol{p}_4'=\boldsymbol{0}$$

が成り立つ．よって

$$A[\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_3',(A+1)\boldsymbol{p}_4',\boldsymbol{p}_4']$$
$$=[\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{p}_3',(A+1)\boldsymbol{p}_4',\boldsymbol{p}_4']\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}.$$

この場合 $A$ の単因子型は$(1,1,t+1,(t-1)(t+1)^2)$，最小多項式は 3 次式 $(t-1)(t+1)^2$ である．□

**例 8**　応用として，行列のベキを計算しよう．例 1 の(＝例 2 の) $A$ で

説明する．$J$ を $A$ の標準形((17)の右辺)とすれば $A = XJX^{-1}$，$A^n = XJ^nX^{-1}$．

$$S := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

により $J = S+N$ と書く．すると $SN = NS$，$N^2 = O$ であり

$$J^n = (S+N)^n = S^n + nS^{n-1}N$$

$$\therefore \quad A^n = XJ^nX^{-1} = X\begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}X^{-1}.$$

$A$ の指数関数も，これより

$$e^{tA} = Xe^{tJ}X^{-1} = X\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}J^n\right)X^{-1} = X\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}X^{-1} \tag{37}$$

となる．この行列要素から，例 2 の微分方程式(7)の解の基底 $e^t, e^{-t}, te^{-t}$ が再び得られる[3)]． □

単因子論は難しく言えば有限生成アーベル群の基本定理，またはユークリッド整域上の有限生成加群の理論というものと同等だが，(一見)抽象的な補題 1 が具体的問題と関わる様子を味わいたい[4)]．

**問** 問§18.3 の $A$ について，$X^{-1}AX$ が $A$ のジョルダン標準形となるような $X$ を求めよ．

## 道案内

1） $n=2$ では4章に紹介した．$m_j$ は $\lambda_j$ の重複度以下だが，等しいとは限らない．なお固有方程式の解の存在を保証するため，数の範囲 $\boldsymbol{K}$ は必要に応じて複素数の範囲で(係数を拡大して)考える．

2） $u$ が解なら $u', u''$ も(7)の解であり，$u=C_1u_-+C_2u_++C_3\tilde{u}_+$ の係数が一般なら，$u, u', u''$ はまた基底になる(そこで本章では $u, u', u''$ を(15)のようにヨコベクトルに並べた)：解ならば $u, u', u'', u'''$ が1次関係式(7)をみたすが，「一般の」解ではこれより小さい(低次の)関係式はなく，$u, u', u''$ は解空間の基底をなす．逆に $u$ を「1の分解」の一種である(18)を用いて小さい方程式をみたす解(に分解する基底変換)が，$u_-$, $u_+$, $\tilde{u}_+$ である．

3） 実際，初期値を並べたベクトル ${}^t[u(0), u'(0), u''(0)]$ に $e^{tA}$ を右から掛ければ，一般の解 $u(t)$ を得る(14章)．

一般にも例8のように，$A$ のジョルダン標準形 $J$ を対角部分 $S$ と上三角部分 $N$ (対角成分は0)の和に分解すると，$SN=NS$ かつ $N^n=O$ であり，$A^n$ や $e^{tA}$ を同様に計算できる．

4） 単因子型が変形の仕方によらず定まること(したがって，$A$ のジョルダン標準形も $A$ で定まること)は，階数を求めるときと同様の事実であり証明を略した．アーベル群の基本定理を学ぶことでも補われるが，次の書では本章と同様にジョルダン標準形を導きつつ示されており，参考になるであろう．

赤尾和雄『線型代数と群』共立講座21世紀の数学，共立出版(1998)

## 練習問題

**18-1**　(i)　必要なら複素数の範囲で，対角化あるいはジョルダン標準形にせよ．

(1) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 10 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} -4 & -7 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ 13 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 6 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -7 & -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

(ii)*　(i)の各行列 $A$ について $A-\lambda E$ の単因子型，$A$ の最小多項式は何か．

**18-2***　(i)　$n$ 次正方行列 $A \in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ の固有値(特性根)$\lambda$ に対し

$$\tilde{V}_A(\lambda) := \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{C}^n \mid (A-\lambda)^n \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\} \subset \boldsymbol{C}^n$$

を $A$ の固有値 $\lambda$ の**一般固有空間**という．$\tilde{V}_A(\lambda)$ が部分空間であることを示せ．

(ii)　$A$ の相異なる特性根を $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$，それぞれの重複度を $m_1, \cdots, m_l$ とする．$A$ のジョルダン標準形を用い $\boldsymbol{C}^n = \tilde{V}_A(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \tilde{V}_A(\lambda_l)$ を示せ．

(iii)　$\tilde{V}_A(\lambda_j) = \mathrm{Im}\left(\prod_{k \neq j} (A-\lambda_k)^{m_k}\right)$ を示せ．

**18-3**　(i)　$m$ を自然数，$\lambda$ は複素数とする．方程式 $\left(\dfrac{d}{dt}-\lambda\right)^m u(t) = f(t)$，$u(0) = 0$ の解が $u(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda(t-s)} f(s)\,ds$ で与えられることを示せ．

(ii)　$L = \left(\dfrac{d}{dt}-1\right)^2\left(\dfrac{d}{dt}+1\right)$ に対し，$Lu = f$ の解を求めよ．[ヒント：練習問題 14-2]

**18-4**　$A \in M_{n,n}(\boldsymbol{C})$ のジョルダン標準形が $J = \mathrm{diag}(J_{N_1}(\lambda_1), \cdots, J_{N_l}(\lambda_l))$ のとき，多項式の範囲の基本変形により次のようにできることを示せ．

$$P(\lambda)(A-\lambda E)Q(\lambda) = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, (\lambda-\lambda_1)^{N_1}, \cdots, (\lambda-\lambda_l)^{N_l})$$

**18-5***　$A$ を $m$ 次，$B$ を $n$ 次正方，$C$ を $(m, n)$ 型行列とし，$(m, n)$ 型行列 $X$ に対する方程式 $AX-XB = C$ を考える．左辺を $X$ できまるものとみて $\phi(X)$ と書くと $\phi : M_{m,n}(\boldsymbol{C}) \to M_{m,n}(\boldsymbol{C})$ である．

(i)　解空間が $M_{m,n}(\boldsymbol{C})$ のアフィン部分空間であることを示せ．

(ii)　$A$ と $B$ をジョルダン標準形にすることで，問題が $A, B$ がジョルダン細胞の形であるときに帰着されることを示せ．

(iii)　ジョルダン細胞 $A = J_m(\alpha)$，$B = J_n(\beta)$ の場合に解 $X$ をすべて求めよ．

# 19章：展望・量子力学入門

最終章では無限次元への入口として，1次元の量子力学を扱ってみよう．合言葉は「ハミルトニアンを対角化せよ」である．解析学的に微妙な点もあるが，おおらかに考えることにする．

## 19.1　量子力学の枠組

まずは古典力学の復習からはじめよう．

古典力学は，ある空間 $X$ を時間 $t$ とともに運動する質点を扱い，運動の法則は質点の位置 $x(t) \in X$ をきめる微分方程式として表される．簡単のため $X = \boldsymbol{R}$ とし，質点の質量を $m$，これに働く「力」を $f(t)$ と書けば，ニュートンの運動方程式は次の通り：

$$m\ddot{x}(t) = f(t) \qquad \left( \dot{} = \frac{d}{dt}, \quad \ddot{} = \frac{d^2}{dt^2} \right). \tag{1}$$

**例1**　質量 $m$ の質点に，フックの法則に従う1次元的なバネの力が働くとき．質点の位置座標(つりあいの位置からの変位)を $x(t)$ で表せば

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \tag{2}$$

が運動方程式である．これはただちに解ける(§4.4, §5.5)：

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin\omega t \qquad \left( \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \right). \tag{3}$$

運動方程式は $p := m\dot{x}$ を用い1階化でき

$$\dot{x} = \frac{1}{m}p, \qquad \dot{p} = -kx \tag{4}$$

と書ける．これより，運動エネルギーと位置エネルギーの和

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \tag{5}$$

について，$\dfrac{d}{dt}H = 0$ (エネルギー保存！)も見やすい．$p$ と $x$ を独立な文字とみると，(4)はいわゆる**ハミルトンの運動方程式**に書ける：

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{6}$$

$p$ と $x$ の関数とみた $H = H(p, x)$ を**ハミルトン関数**とよぶ．　□

量子力学では，不確定性原理により「質点の位置」に明確な意味がないとされ，各時刻 $t$ における対象の状態を表すのは複素数値関数(**波動関数**)である：

$$\psi_t = \psi(\cdot, t) : X \ni x \mapsto \psi_t(x) = \psi(x, t) \in \boldsymbol{C}.$$

$X$ は古典的な「位置」の空間である．$X = \boldsymbol{R}$ で $\psi$ がある粒子の波動関数なら，実数 $\int_a^b |\psi_t(x)|^2 dx$ が時刻 $t$ で区間 $[a, b]$ に粒子の見い出される確率を表す[1]．確率の総和は 1 だから，物理的状態 $\psi$ に対し

$$\int_X |\psi_t(x)|^2 dx = 1 \qquad (\therefore\ \psi_t \in L^2(X)) \tag{7}$$

(15 章例 2 参照)が必要である．ただし，$0 \neq \|\psi\|^2 = \int_X |\psi(x, t)|^2 dx < \infty$ なら $\psi/\|\psi\|$ を考えればよいので，$\psi \in L^2(X)$，$\psi \neq 0$ と言ってもよい．つまり $L^2(X)$ の 0 でない元全体が状態の全体となる．$X = \boldsymbol{R}$ ならば

$$\int_{\boldsymbol{R}} x|\psi_t(x)|^2 dx = \int_{\boldsymbol{R}} \overline{\psi_t(x)}\, x\psi_t(x)\, dx \tag{8}$$

は時刻 $t$ の粒子の位置 $x$ の期待値を表す．複素ベクトル空間 $L^2(X)$ にはエルミート内積があった：

$$(f, g) = \int_X \overline{f(x)}\, g(x)\, dx. \tag{9}$$

$x$ 倍作用素 $x\cdot : \psi(x) \mapsto x\psi(x)$ を考えると，(8)は $(\psi_t, x\psi_t)$ と書ける．一般の物理量は線型写像 $A : L^2(X) \to L^2(X)$ (**作用素**ともいう)で表され

$$(\psi, A\psi) \qquad (\text{ディラック流では，}\langle\psi|A|\psi\rangle\text{と書く}) \tag{10}$$

が状態 $\psi$ において観測される $A$ の期待値を表す．物理量は実数ゆえ(10)も実数であるべきだから，物理量(観測可能量)を表す $A$ は

$$(Af, g) = (f, Ag) \qquad (f, g \in L^2(X))$$

というエルミート性をもたなくてはならない．

---

たとえば ($X = \boldsymbol{R}$ のとき)$\left(\psi, \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{d}{dx}\psi\right)$ は運動量の期待値を表す．ただし $\psi \in L^2(\boldsymbol{R})$ は必ずしも微分可能と限らないので，厳密には $A = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{d}{dx}$ は微分可能関数からなる部分空間で(とりあえず)考える．

---

ハミルトンの運動方程式(6)で定まる系の量子力学版では，$H(p, x)$ で $p$ を $\dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$ とした作用素が波動関数の時間変化を与える[2]：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\left(\frac{\hbar}{i}\partial_x, x\right)\psi \qquad \left(\partial_x = {}' = \frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{11}$$

$\hbar > 0$ は基本定数のひとつ，**プランク定数**である．(11)を**シュレディンガー方程式**という．ハミルトン関数が

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + u(x) \tag{12}$$

($u(x)$ がポテンシャル(位置)エネルギー)ならば，(11)の右辺は

$$H\left(\frac{\hbar}{i}\partial_x, x\right)\psi(x) = \frac{-\hbar^2}{2m}\psi''(x) + u(x)\psi(x) \tag{13}$$

である．(11)が(1)にあたる量子力学的運動方程式である．

(11)の右辺の作用素 $H = H\left(\frac{\hbar}{i}\partial_x, x\right)$ を**ハミルトニアン**とよぶ．$\psi$ に対し(13)の関数を対応させる写像 $H : \psi \mapsto H\psi$ は $\psi$ について線型で，$(\psi, H\psi)$ は状態 $\psi$ において観測されるエネルギーの期待値を表す．

$H = H\left(\frac{\hbar}{i}\partial_x, x\right)$ は時間 $t$ によらないとすれば，(11)の解は指数関数 $T_t := e^{-itH/\hbar}$ で表せる：$\psi_0(x)$ が時刻 $t = 0$ での初期状態のとき，

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= (T_t\psi_0)(x) = e^{-itH/\hbar}\psi_0(x)\\ &= \psi_0(x) - \frac{it}{\hbar}(H\psi_0)(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{it}{\hbar}\right)^2(H^2\psi_0)(x) - \cdots.\end{aligned} \tag{14}$$

これが解であることは，いつものように $\frac{d}{dt}(e^{tA}) = Ae^{tA}$ による．一方

$$\varphi \in L^2(\boldsymbol{R}), \qquad H\varphi = \lambda\varphi \qquad (\lambda \in \boldsymbol{R}) \tag{15}$$

($\varphi$ が $H$ の $L^2$ **固有関数**のとき)については，(11)は直接(または，(14)で $H$ を $\lambda$ におきかえて)解ける：すなわち，(15)を(11)に代入して

$$i\hbar\frac{d}{dt}\varphi = \lambda\varphi \qquad \therefore \quad \varphi(x, t) = e^{-it\lambda/\hbar}\psi_0(x). \tag{16}$$

$\varphi \not\equiv 0$, $\|\varphi\| = 1$ なら $(\varphi, H\varphi) = \lambda(\varphi, \varphi) = \lambda$ となるから，(15)はエネルギー一定 $(\lambda)$ の状態を表す．$\psi(x, t) = (T_t\psi_0)(x)$ (14)で考えれば，$HT_t = T_tH$ より

$$H(T_t\psi_0) = T_tH\psi_0 = T_t\lambda\psi_0 = \lambda(T_t\psi_0)$$

なので，時間が経ってもエネルギーは保たれる．そこで(15)をみたす $\varphi$ を**定常状態**ともいう．

定常状態をすべて見つけることはハミルトニアン $H$ を対角化することにほかならない．この問題が解ければ，どんなエネルギーをもつどんな状

態があるか，原理的にはすべてわかることになる[3)]．

**問**　(14)が(11)の解であることを確かめよ．

## 19.2 調和振動子

ハミルトニアン $H$ (13) は $L^2(\boldsymbol{R})$ という無限次元空間の間の線型写像で，いわば無限次正方行列である．定常状態(エネルギー固有状態)(15)を求めるのは行列の固有ベクトルを求めるのと同種の問題だが，固有方程式は行列式がないと考えられない．定常状態がすべて明示的に求まる例として，例 1 の量子力学版(**調和振動子**)を考えよう．(5)より，(11)の右辺は

$$H\left(\frac{\hbar}{i}\,\partial_x, x\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_x^2 + \frac{m\omega^2}{2}\,x^2 \tag{17}$$

である．この $H$ に対し固有関数を求めるには

$$a_+ := \hbar\partial_x + m\omega x, \qquad a_- := -\hbar\partial_x + m\omega x \tag{18}$$

(**消滅作用素，生成作用素**)が便利である．ハミルトン関数(5)でいえば(簡単に $m = k = 1$ とする)，$a_\pm$ は $H = \dfrac{1}{2m}(ip + m\omega x)(-ip + m\omega x)$ と因数分解するときの 1 次式 $\mp ip + m\omega x$ にあたる．

**補題 1**　ア)　$[\partial_x, x] = \partial_x x - x\partial_x = 1$.

イ)　$f, g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ について，微積分が意味をもつ限り

$$(\partial_x f, g) + (f, \partial_x g) = 0 \qquad (\text{つまり } \partial_x^* = -\partial_x).$$

**証明**　ア)　任意の関数 $f$ に対し，$(\partial_x x - x\partial_x)f = (xf)' - xf' = 1\cdot f$.

イ)　$(f, g) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x+s)}\, g(x+s)\, dx$

を $s = 0$ で微分すればよい．　□

一般に $[A, BC] = A(BC) - (BC)A = [A, B]C + B[A, C]$ なので

$$\begin{aligned}[H, a_\pm] &= \pm\frac{m\omega^2\hbar}{2}[x^2, \partial_x] - \frac{\hbar^2}{2m}[\partial_x^2, m\omega x] \\ &= \pm m\omega^2\hbar[x, \partial_x]x - \omega\hbar^2[x, \partial_x]\partial_x\end{aligned}$$

$$\overset{ア)}{=} \mp\omega\hbar a_{\pm}. \tag{19}$$

ゆえに $H\psi=\lambda\psi$ のとき，$a_{\pm}\psi$ は

$$Ha_{\pm}\psi=([H, a_{\pm}]+a_{\pm}H)\psi=(\lambda\mp\omega\hbar)a_{\pm}\psi \tag{20}$$

と，固有値が上下した固有関数になる．また

$$H=\frac{1}{2m}a_{-}a_{+}+\frac{\omega\hbar}{2} \tag{21}$$

と書けるから，

$$(a_{-}f, g)\overset{イ)}{=}(f, a_{+}g)$$

とあわせて

$$(Hf, g)=\frac{1}{2m}(a_{+}f, a_{+}g)+\frac{\omega\hbar}{2}(f, g)=(f, Hg),$$

$$(Hf, f)=\frac{1}{2m}\|a_{+}f\|^2+\frac{\omega\hbar}{2}\|f\|^2>0.$$

つまり $H$ はエルミート的 $(H=H^*)$ で，$Hf=\lambda f$ なら $\lambda\in\boldsymbol{R}$，$\lambda>\dfrac{\omega\hbar}{2}>0$．エネルギー $\lambda$ が下がっても 0 以下にならないので，最小固有値 $\lambda_0$ に対応する固有ベクトル $\varphi$ に $a_{+}$ を作用させると 0 になるしかない：$a_{+}\varphi=0$（消滅！）．これは微分方程式であり，

$$a_{+}\varphi=(\hbar\partial_x+m\omega x)\varphi=\hbar\varphi'+m\omega x\varphi=0\Longleftrightarrow\frac{\varphi'}{\varphi}=-\frac{m}{\hbar}\omega x$$

$$\therefore\quad \varphi=C\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)\qquad (C\text{ は定数})$$

と解ける．$C=1$ とし，$\varphi_0=\exp\left(-\dfrac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$ と書こう．

$$H\varphi_0=\left(\frac{1}{2m}a_{-}a_{+}+\frac{\omega\hbar}{2}\right)\varphi_0=\frac{\omega\hbar}{2}\varphi_0$$

により，$\lambda_0=\dfrac{\omega\hbar}{2}$．また $\varphi_0\in L^2(\boldsymbol{R})$ である：

$$\|\varphi_0\|^2=(\varphi_0, \varphi_0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-m\omega x^2/\hbar}dx$$

$$\overset{\sqrt{m\omega/\hbar}\,x=y}{=}\frac{1}{\sqrt{m\omega/\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}}<\infty.$$

ただし最後の等号はガウスの積分 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}$ を用いた．

(20)より $a_{-}^{n}\varphi_0$ の固有値（エネルギー）は $\lambda=\left(\dfrac{1}{2}+n\right)\omega\hbar$ である．一般に $H\psi=\lambda\psi$ とすれば

$$\|a_-\psi\|^2 = (a_-\psi, a_-\psi) = (\psi, a_+a_-\psi)$$
$$= (\psi, ([a_+, a_-]+a_-a_+)\psi)$$
$$= 2m(\lambda+\omega\hbar/2)\|\psi\|^2,$$
$$\therefore \quad \|a_-^n\varphi_0\|^2 = 2mn\omega\hbar\|a_-^{n-1}\varphi_0\|^2 = (2m\omega\hbar)^n n!\|\varphi_0\|^2. \tag{22}$$

あらためて $\dfrac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|}$ を $\varphi_0$ とし，$a_-^n\varphi_0$ の正規化を $\varphi_n$ とおこう ($n = 0, 1, 2, \cdots$)：

$$\varphi_n := (\sqrt{(2m\omega\hbar)^n n!})^{-1}a_-^n\varphi_0. \tag{23}$$

$H = H^*$ の異なる固有値の正規化された固有ベクトルとして $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{m,n}$ である．$\varphi_n$ すべてと直交する $L^2(\boldsymbol{R})$ の元は恒等的に 0 であることがわかるから，$\{\varphi_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ は $L^2(\boldsymbol{R})$ の"正規直交基底"である．

---

$\varphi_n$ はエルミート多項式とよばれる $n$ 次多項式 $h_n$ と $\varphi_0$ の積であり((24)式)，これは「多項式 $\times e^{-m\omega x^2/\hbar}$ の形の任意の $\psi$ に対し $(f, \varphi) = 0$ なら，$\varphi = 0$ ということである：§19.5 の問を参照．

一般に無限次元の空間 $V$ にノルムを導入した際は，**完備性**「$\boldsymbol{v}_n$ が $\|\boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{v}_n\| \to 0$ $(m, n \to \infty)$ をみたす $V$ の点列のとき，$\|\boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{v}\| \to 0$ となる $V$ の元 $\boldsymbol{v}$ が存在する」(コーシー列の収束)を要請することが多い．これは有理数では収束で閉じず不自由なので実数全体を考えることにあたる．$L^2(\boldsymbol{R})$ は完備性をもち，$f \in L^2(\boldsymbol{R})$ から作った関数の列 $f_N = \sum_{n=0}^{N}(f, \varphi_n)\varphi_n$ は $\|f_N - f\|_{L^2} \to 0$ $(N \to \infty)$ となる．この意味で $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(f, \varphi_n)\varphi_n(x)$ と書け，$\{\varphi_n\}$ を $L^2(\boldsymbol{R})$ の「正規直交基底」(厳密には有限和表示を与える基底でないので，**完全直交系**という)と考えることができる．

---

これでエネルギー固有状態(定常状態)がすべて求まった．$n = 0, 1, 2$ のときの概形は次のとおり(次ページ図1)：

$$\varphi_0(x) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\,e^{-m\omega x^2/2\hbar},$$
$$\varphi_1(x) = (-\hbar\partial_x + m\omega x)\varphi_0(x) = 2m\omega x\varphi_0(x), \tag{24}$$
$$\varphi_2(x) = (-\hbar\partial_x + m\omega x)\varphi_1(x) = \{(2m\omega x)^2 - 2m\omega\hbar\}\varphi_0(x).$$

$\varphi_n(x)$ を初期値とする(11)の解は，(16)より

$$T_t\,\varphi_n(x) = e^{-it\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega}\varphi_n(x) \tag{25}$$

である．一般の元 $\psi \in L^2(\boldsymbol{R})$ の時間発展もわかる：

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) \qquad (c_n = (\varphi_n, \psi)) \tag{26}$$

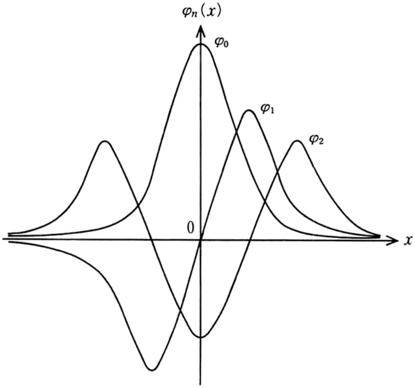



**図1**　第0，第1，第2エネルギー固有状態 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ (24).

と展開すれば，(14)は $\psi_0$ について線型だから

$$(T_t\,\psi)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-it\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega}\varphi_n(x).$$

---

**注意**　$H$ はエルミート的なので $T_t$ はユニタリである：$\|\psi\| = \|T_t\,\psi\|$.（ハミルトニアンが時間によらない(13)の形ならば同様.）　これは全確率1の条件(7)が時間発展で保たれることを意味する(**確率の保存**).

---

**問**　(20), (21), (22)を確かめよ.

## 19.3　コヒーレント状態

これで(17)は解けたが，定常状態は文字通り「動かない」ため，調和振動子がバネの運動の量子版だといってもにわかには納得しにくい．実際 $\varphi_n(x)$ の時間発展(25)については，$|\varphi_n(x,t)|^2$ は $x$ の偶関数で

$$\langle\varphi_n(x,t)|x|\varphi_n(x,t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x|\varphi_n(x,t)|^2 dx = 0.$$

つまり粒子は(期待値(8)の意味では)ずっと原点にいるだけで面白くない．そこで**コヒーレント状態**

$$\phi_\alpha(x) := e^{\alpha a_-}\varphi_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}(a_-^n\varphi_0)(x) \tag{27}$$

$(\alpha \in \boldsymbol{C})$ の時間発展を調べよう．$\phi_\alpha$ は $\alpha_-^n\varphi_0$ $(\propto\varphi_n,\ \propto$は比例の意$)$の和で，

$\varphi_n$ の**母関数**とも言える．$\phi_\alpha \in L^2(\boldsymbol{R})$ である：

$$\|\phi_\alpha\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!^2} \|(\alpha a_-)^n \varphi_0\|^2 \overset{(22)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!^2} (2m\omega\hbar)^n n! \|\varphi_0\|^2$$

$$= e^{2m\omega\hbar|\alpha|^2} \|\varphi_0\|^2 < \infty.$$

**補題 2** （i） $[A, B] = C$, $[A, C] = [B, C] = 0$ のとき

ア） $[A, e^B] = Ce^B, \quad e^A e^B e^{-A} = e^C e^B$ (28)

イ） $e^{A+B} = e^{-C/2} e^A e^B.$ (29)

（ii） $[A, B] = \lambda B$ ($\lambda \in \boldsymbol{C}$) のとき，$e^A B e^{-A} = e^\lambda B$.

**証明** （i） ア） $[A, [A, B]] = 0$ を用い $[A, e^B]$ を計算すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [A, B^n] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n[A, B]}{n!} B^{n-1} = Ce^B.$$

$Ae^B - e^B A = Ce^B \Leftrightarrow e^B A e^{-B} = A - C$ だから，後者の指数関数をとれば

$$e^B e^A e^{-B} = e^{e^B A e^{-B}} = e^{A-C} = e^{-C} e^A \qquad ([A, C] = 0 \text{ より})$$

イ） $X(t) = e^{-t^2 C/2} e^{tA} e^{tB}$ について

$$\frac{d}{dt} X(t) = -tCe^{-t^2 C/2} e^{tA} e^{tB} + e^{-t^2 C/2} A e^{tA} e^{tB} + e^{-t^2 C/2} e^{tA} B e^{tB}$$

$$= (-tC + A + e^{tA} B e^{-tA}) X(t) \overset{(28)}{=} (A+B) X(t).$$

この方程式をみたし $t = 0$ で $e^0$ となる唯一の解として，$e^{-t^2 C/2} e^{tA} e^{tB}$ は $e^{tA+tB}$ に等しい．

（ii） イ)と同様 $e^{tA} B e^{-tA} = e^{\lambda t} B$ を示す．左辺を $X(t)$ とおくと $X'(t) = e^{tA} A B e^{-tA} + e^{tA} B(-A) e^{-tA} = e^{tA}(AB - BA) e^{-tA} = \lambda X(t)$. 右辺も同じ式をみたし，同じ方程式の $X(0) = B$ である解として両辺は等しい． □

すると $[a_+, e^{\alpha a_-}] \overset{(28)}{=} [a_+, \alpha a_-] e^{\alpha a_-} = 2\alpha m\omega\hbar e^{\alpha a_-}$,

$$\therefore \quad a_+ \phi_\alpha = [a_+, e^{\alpha a_-}] \varphi_0 = 2\alpha m\omega\hbar \phi_\alpha.$$

また $a_- = -a_+ + 2m\omega x$, $[a_+, x] = \hbar$ より，(27)は

$$e^{\alpha(-a_+ + 2m\omega x)}\varphi_0(x) \overset{(29)}{=} e^{-\alpha^2 m\omega\hbar} e^{2m\omega\alpha x} e^{\alpha a_+}\varphi_0(x)$$

に等しく，$e^{\alpha a_+}\varphi_0(x) = \varphi_0(x) = e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}$ だから

$$\phi_\alpha(x) = e^{-\alpha^2 m\omega\hbar} e^{2m\omega\alpha x} e^{-m\omega x^2/(2\hbar)} = e^{m\omega(2\hbar^2\alpha^2-(x-2\hbar\alpha)^2)/(2\hbar)}. \tag{30}$$

これより $\alpha = \alpha_R + i\alpha_I$ $(\alpha_R, \alpha_I \in \boldsymbol{R})$ とすれば

$$|\phi_\alpha(x)|^2 = e^{2m\omega\hbar|\alpha|^2} e^{-m\omega(x-2\hbar\alpha_R)^2/\hbar} \tag{31}$$

となり，$|\phi_\alpha(x)|^2$ は $x = 2\hbar\alpha_R$ で最大となる．

では $\phi_\alpha$ の運動を調べよう．$T_t = e^{-itH/\hbar}$ について

$$T_t e^{\alpha a_-}\varphi_0 = (T_t e^{\alpha a_-} T_t^{-1})\, T_t\varphi_0 \tag{32}$$

である．$[H, a_-] = \omega\hbar a_-$（∵(19)式）と補題2(ii)より

$$T_t\, a_- T_t^{-1} = e^{-it\omega} a_- \qquad \therefore \quad T_t\, e^{\alpha a_-} T_t^{-1} = e^{e^{-it\omega}\alpha a_-}.$$

$\alpha(t) := e^{-it\omega}\alpha$ とおけば，$T_t\,\varphi_0 = e^{-it\omega/2}\varphi_0$ とあわせ

$$T_t\,\phi_\alpha = (32) = e^{\alpha(t)a_-} e^{-it\omega/2}\varphi_0 = e^{-it\omega/2}\phi_{\alpha(t)}$$

$$\therefore \quad |(T_t\,\phi_\alpha)(x)|^2 = e^{2m\omega\hbar|\alpha|^2} e^{-m\omega(x-2\hbar\alpha(t)_R)^2/\hbar}. \tag{33}$$

ただし $\alpha(t)_R = \mathrm{Re}\,\alpha(t)$．$\alpha(t) = e^{-it\omega}\alpha \in \boldsymbol{C}$ は円運動だから，実数 $x$ の関数 $|(T_t\,\varphi_\alpha)(x)|^2$ (33)の対称軸

$$x(t) = 2\hbar\,\mathrm{Re}\,\alpha(t) = 2\hbar(\alpha_R\cos\omega t + \alpha_I \sin\omega t)$$

は単振動する．古典力学的な単振動(3)が $x(t)$ を中心に「ぼやけて」いるわけである(図2)．

(33)は $\hbar \to 0$ では $x = x(t)$ 以外で0という，1点に集中した分布にな

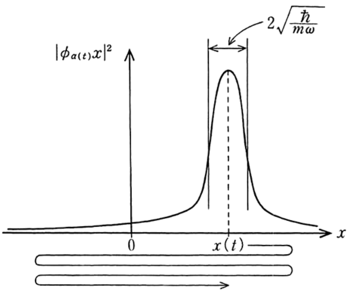



**図2**　コヒーレント状態の時間発展(33)．$2\sqrt{\hbar/m\omega}$ は変曲点の間隔(一定)である．

る．その１点に注目すれば古典力学(3)が復元される．

**問**　(30), (31), (32), (33)を確かめよ．

## 19.4　固有関数展開とデルタ関数

任意の関数 $f$ を(26)のように $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots$ で展開するとき(26)，その係数は $c_n = (\varphi_n, f)$ である[4]．一般にも無限次元である $L^2(\boldsymbol{R})$ に“正規直交基底” $\{u_k\}$ をとり，関数 $f$ を $f = \sum u_k(u_k, f)$ と展開したとすれば

$$f(x) = \sum_k u_k(x)\int_{-\infty}^{\infty}\overline{u_k(y)}f(y)\,dy$$

である．右辺で和と積分を形式的に交換すれば

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_k u_k(x)\overline{u_k(y)}\right)f(y)\,dy. \tag{35}$$

どんな $f$ について積分しても $x$ での値しか出てこないのだから，カッコの中を $\delta(x, y)$ と書くと

$$\delta(x, y) := \sum_k u_k(x)\overline{u_k(y)} = \begin{cases}\infty & (x = y)\\ 0 & (x \neq y)\end{cases} \tag{36}$$

が必要であろう．この $\delta(x, y) = \delta(x-y)$ をディラックの $\overset{\text{デルタ}}{\delta}$ **関数**とよぶ．

---

(35)で $f$ を $f_a(x) = f(x+a)$ にして考えると，$\delta(x, y) = \delta(x+a, y+a)$ がわかるから，$\delta(x, y)$ は $x-y$ にしかよらないと考えられる：

$$f(x+a) = \int\delta(x+a, y+a)f(y+a)\,dy = f_a(x) = \int\delta(x, y)f_a(y)\,dy$$

$$\therefore\quad 0 = \int(\delta(x+a, y+a)-\delta(x, y))f_a(y)\,dy \qquad (\forall f_a).$$

ただし $\delta$ は通常の関数ではないので，**超関数**とよぶ．超関数といっても(34)のように「関数の１次関数」を定める「重み」と考えれば，超関数は適当な意味での双対空間の元と考えることができる．$\delta$ 関数は $(\delta, f) = f(0)$ で定まる超関数である．

---

(35)より

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-y)f(y)\,dy = f(x) \tag{37}$$

である．よって $f$ が階段状の関数のとき(図 3)

$$\int_{-\infty}^{z}\delta(x-y)\,dx = Y_{z-y} := \begin{cases}1 & (z-y > 0)\\ 0 & (z-y < 0)\end{cases}$$

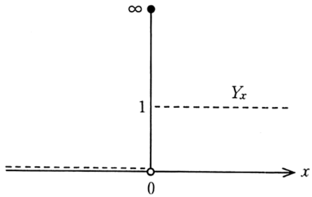



**図3**　デルタ関数 $\delta(x)$ のグラフ，破線はヘビサイド関数(38).

である．微積分の基本定理を拡大解釈すれば，この不連続関数 $Y_x$(**ヘビサイド関数**)の「微分」がデルタ関数と考えられる：

$$\delta(x) = \frac{d}{dx} Y_x. \tag{38}$$

**問**　$\delta_\hbar(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}} e^{-x^2/\hbar}$ としよう(これは $m = \omega = 1$ のときの $\varphi_0^2$ である)．$f$ を $\boldsymbol{R}$ 上の有界な連続関数とするとき，次を示せ：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta_\hbar(x)\,dx \to f(0) \qquad (\text{すなわち，}\delta_\hbar(x) \to \delta(x)).$$

## 19.5　一般展開定理

空間1次元のハミルトニアン $H$ (42)については，一般のポテンシャル $u(x)$ の場合も($L^2$ と限らない)固有関数で任意関数を展開し，$H$ を対角化することができる．原理を正規行列 $A$ で説明しよう．固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ ($A\boldsymbol{v}_j = \lambda_j \boldsymbol{v}_j$) は正規直交にとれて，

$$A = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_1^* + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n \otimes \boldsymbol{v}_n^* \tag{39}$$

だった(§17.4．$\lambda_j \neq \lambda_k (j \neq k)$ としよう．)　$\boldsymbol{v}_j \otimes \boldsymbol{v}_j^*$ は $\boldsymbol{v}_j$ の方向への直交射影の作用素である．すると

$$\lambda - A = (\lambda - \lambda_1)\,\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_1^* + \cdots + (\lambda - \lambda_n)\,\boldsymbol{v}_n \otimes \boldsymbol{v}_n^*,$$

$$(\lambda - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda - \lambda_1}\,\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_1^* + \cdots + \frac{1}{\lambda - \lambda_n}\,\boldsymbol{v}_n \otimes \boldsymbol{v}_n^*$$

でもある．$\lambda$ がある $\lambda_j$ と一致すると $(\lambda - A)^{-1}$ は存在しないが，$(\lambda - \lambda_j)^{-1}$ の係数は(関数論的に考えれば留数として意味をもち) $\boldsymbol{v}_j \otimes \boldsymbol{v}_j^*$ に等しい：

$$\oint_{\lambda_j} (\lambda - A)^{-1} \frac{d\lambda}{2\pi i} = \boldsymbol{v}_j \otimes \boldsymbol{v}_j^*. \tag{40}$$

左辺の積分は成分ごとで，積分路は $\lambda_j$ を中心とする小円である．よって

コーシーの積分定理より，正則関数 $F$ に対し

$$F(A) = \sum_j F(\lambda_j)\, \boldsymbol{v}_j \otimes \boldsymbol{v}_j^* \overset{(40)}{=} \sum_j \oint_{\lambda_j} F(\lambda)\,(\lambda - A)^{-1} \frac{d\lambda}{2\pi i}$$

$$= \int_C F(\lambda)\,(\lambda - A)^{-1} \frac{d\lambda}{2\pi i}. \tag{41}$$

（$C$ はすべての $\lambda_j$ を囲む閉路.） 以上を形式的に

$$A = H = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x) \tag{42}$$

について認めれば，$F(\lambda) \equiv 1$ のとき $(\lambda - H)^{-1}$ を具体的に表すことで(26)にあたる展開定理が得られる．また $F(\lambda) = \lambda$ とすれば $H$ の対角化が得られる．

$u(x) = \dfrac{k}{2}x^2$ が調和振動子の場合だが，以下簡単のため[5] $u(x)$ は遠方で十分早く 0 に減衰する滑かな実数値関数としよう．また，$\hbar = 1 = 2m$ とする．固有関数の方程式

$$(\lambda - H)\phi = \phi'' + (\lambda - u)\phi = 0 \tag{43}$$

の解が $L^2(\boldsymbol{R})$ に属すには，$|x| \to \infty$ で $\phi(x) \to 0$ が必要．(43)は遠方で

$$\phi'' + \lambda\phi = 0$$

で近似される．この解 $e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}$ は平方根を適当に選べば，$\lambda \notin \boldsymbol{R}$ に対し $e^{\pm i\sqrt{\lambda}x} \to 0$ ($x \to \pm\infty$，複号同順）とできる．そこで $\lambda \notin \boldsymbol{R}$ に対し，(43)の解で

$$\phi_\lambda^\pm(x)\,(\sim e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}) \to 0 \qquad (x \to \pm\infty,\ \text{複号同順}) \tag{44}$$

という挙動のもの $\phi_\lambda^\pm$ の存在が示される[6]．すると $W[f, g] := fg' - f'g$ をロンスキアン(練習問題 14-4)として

$$g_\lambda(x, y) := \frac{1}{W[\phi_\lambda^-, \phi_\lambda^+]} \times \begin{cases} \phi_\lambda^+(x)\,\phi_\lambda^-(y) & (x \geqq y) \\ \phi_\lambda^-(x)\,\phi_\lambda^+(y) & (x \leqq y) \end{cases} \tag{45}$$

$$= \frac{1}{W[\phi_\lambda^-, \phi_\lambda^+]} \times [\phi_\lambda^+(x), \phi_\lambda^-(x)] \begin{bmatrix} 0 & Y_{x-y} \\ Y_{y-x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_\lambda^+(y) \\ \phi_\lambda^-(y) \end{bmatrix}$$

**(グリーン関数)**が$(\lambda - H)^{-1}$ の**核関数**を与える：

**定理 44** $\lambda \notin \boldsymbol{R}$に対し

$$(\lambda - H)^{-1} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\lambda(x, y)\, f(y)\, dy. \tag{46}$$

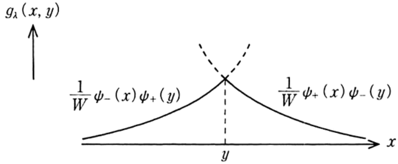



図 4　グリーン関数(45)．$x=y$ では微分が不連続である．

---

**注**　(46)は $f$ について線型で，$y$ についての積分を和とみると行列とベクトルとの積に見える．一般に線型な積分変換の行列要素にあたる2変数関数((46)では $g_\lambda(x,y)$)をその変換の核関数という．

---

**証明**　$(\partial_x^2-u(x)+\lambda)g_\lambda(x,y)=\delta(x-y)$ ならよい．$(\partial_x^2-u+\lambda)\psi_\lambda^\pm=0$ より

$$\frac{d}{dx}W[\psi_\lambda^-,\psi_\lambda^+]=\psi_\lambda^-\psi_\lambda^{+\prime\prime}-\psi_\lambda^{-\prime\prime}\psi_\lambda^+$$
$$=\psi_\lambda^-((u-\lambda)\psi_\lambda^+)-((u-\lambda)\psi_\lambda^-)\psi_\lambda^+=0.$$

つまり $W[\psi_\lambda^-,\psi_\lambda^+]$ は定数であることに注意．$\delta_{x-y}:=\delta(x-y)$ と書くと

$$W[\psi_\lambda^-,\psi_\lambda^+]\frac{d}{dx}g_\lambda(x,y)$$
$$\overset{(38)}{=}[\psi_\lambda^{+\prime}(x),\psi_\lambda^{-\prime}(x)]\begin{bmatrix}0 & Y_{x-y}\\ Y_{y-x} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_\lambda^+(y)\\ \psi_\lambda^-(y)\end{bmatrix}$$
$$+[\psi_\lambda^+(x),\psi_\lambda^-(x)]\begin{bmatrix}0 & \delta_{x-y}\\ -\delta_{x-y} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_\lambda^+(y)\\ \psi_\lambda^-(y)\end{bmatrix},$$

$$W[\psi_\lambda^-,\psi_\lambda^+](\partial_x^2-u(x)+\lambda)g_\lambda(x,y)$$
$$=\{(\partial_x^2-u(x)+\lambda)[\psi_\lambda^+(x),\psi_\lambda^-(x)]\}\begin{bmatrix}0 & Y_{x-y}\\ Y_{y-x} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_\lambda^+(y)\\ \psi_\lambda^-(y)\end{bmatrix}$$
$$+2[\psi_\lambda^{+\prime}(x),\psi_\lambda^{-\prime}(x)]\begin{bmatrix}0 & \delta_{x-y}\\ -\delta_{x-y} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_\lambda^+(y)\\ \psi_\lambda^-(y)\end{bmatrix}$$
$$+[\psi_\lambda^+(x),\psi_\lambda^-(x)]\begin{bmatrix}0 & \delta'_{x-y}\\ -\delta'_{x-y} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_\lambda^+(y)\\ \psi_\lambda^-(y)\end{bmatrix}. \tag{47}$$

(47)の第1項において $\partial_x^2$ は { } の中にのみ作用し，$(\lambda-H)\psi_\lambda^\pm=0$ より 0.

$$\therefore\quad (47)=2\{\psi_\lambda^{+\prime}(x)\psi_\lambda^-(y)-\psi_\lambda^-(x)'\psi_\lambda^+(y)\}\delta(x-y)$$
$$+\{\psi_\lambda^+(x)\psi_\lambda^-(y)-\psi_\lambda^-(x)\psi_\lambda^+(y)\}\delta'(x-y)$$

デルタ関数は $x=y$ 以外で 0 だから，第1項の { } の中身は $x=y$ と

してよく，$2\{\psi_\lambda^{+\prime}(x)\psi_\lambda^-(x)-\psi_\lambda^{-\prime}(x)\psi_\lambda^+(x)\}=2W[\psi_\lambda^-,\psi_\lambda^+]$．第 2 項ではデルタ関数の微分を扱う必要があるが，補題 1 にしたがい $(f,\delta')=-(f',\delta)$ と「相手におしつける」ことにする(p 322 問(i)参照)：すると

$$\{\psi_\lambda^+(x)\psi_\lambda^-(y)-\psi_\lambda^-(x)\psi_\lambda^+(y)\}\frac{d}{dx}\delta(x-y)$$
$$=-\left\{\frac{d}{dx}\psi_\lambda^+(x)\psi_\lambda^-(y)-\frac{d}{dx}\psi_\lambda^-(x)\psi_\lambda^+(y)\right\}\delta(x-y)$$

$x=y$ とすれば $-W[\psi_\lambda^-,\psi_\lambda^+]\delta(x-y)$．$\therefore$ (47) $=W[\psi_\lambda^-,\psi_\lambda^+]\delta(x-y)$．

□

よって，(41)を形式的に認めれば

$$(F(H)f)(x)=\int_C F(\lambda)(\lambda-H)^{-1}f(x)\,\frac{d\lambda}{2\pi i}$$
$$=\int_C F(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}g_\lambda(x,y)f(y)\,dy\,\frac{d\lambda}{2\pi i}$$

とくに $F\equiv 1$ とすれば，すべての $f$ に対し

$$f(x)=\int_C\int_{-\infty}^{\infty}g_\lambda(x,y)f(y)\,dy\,\frac{d\lambda}{2\pi i}$$

である．つまり(積分を形式的に順序交換すれば)

$$\delta(x-y)=\int_C g_\lambda(x,y)\,\frac{d\lambda}{2\pi i}. \tag{48}$$

以下では(43)の解の基底 $c_\lambda(x), s_\lambda(x)$ を

$$\begin{bmatrix} c_\lambda(0) & c_\lambda'(0) \\ s_\lambda(0) & s_\lambda'(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{49}$$

で定め，(48)を関数 $c_\lambda, s_\lambda$ で書き換えよう．$c_\lambda, s_\lambda$ はそれぞれ cos, sin の類似物で，$u(x)$ も初期値も実数だから，$\lambda\in\boldsymbol{R}$ なら $c_\lambda, s_\lambda$ はすべての $x$ に対し実数値となる．

実でない $\lambda$ に対し，$\sqrt{\lambda}$ で虚部が正 $(\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}>0)$ の根を表すことにすれば，もう一方の平方根は $-\sqrt{\lambda}$ で

$$\psi_\lambda^+(x)\overset{x\to\infty}{\sim}e^{i\sqrt{\lambda}x},\qquad \psi_\lambda^-(x)\overset{x\to-\infty}{\sim}e^{-i\sqrt{\lambda}x}$$

($\sim$ は比の極限が有限の意)である．共役をとると

$$\overline{\psi_\lambda^+(x)}\overset{x\to\infty}{\sim}e^{-i\sqrt{\bar\lambda}x},\quad \overline{\psi_\lambda^-(x)}\overset{x\to-\infty}{\sim}e^{+i\sqrt{\bar\lambda}x}.$$

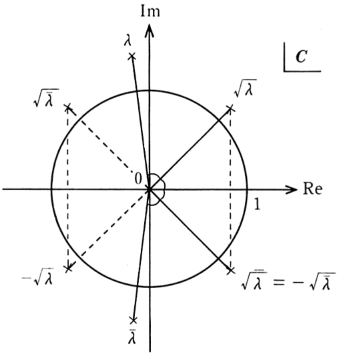



**図5**　平方根 $\sqrt{\lambda}$ のとりかた．

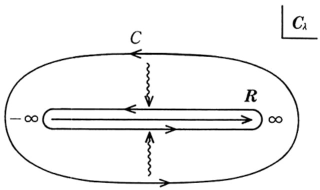



**図6**　積分路 $C$ を実軸を回る道に変形する．

$\psi_\lambda^\pm(0)=1$ としておけば，$\overline{\sqrt{\lambda}} = -\sqrt{\bar\lambda}$ より(図5)

$$\overline{\psi_\lambda^\pm(x)} = \psi_{\bar\lambda}{}^{\pm}(x) \qquad \therefore \quad \overline{g_\lambda(x, y)} = g_{\bar\lambda}(x, y). \tag{50}$$

また(50)の前者より，$\psi_\lambda^\pm$ を($\psi_\lambda^\pm(0)=1$ を考慮し)

$$\psi_\lambda^\pm(x) = c_\lambda(x) + m_\lambda^\pm s_\lambda(x) \tag{51}$$

と表すとき $\overline{m_\lambda^\pm} = m_{\bar\lambda}{}^{\pm}$．$m_\lambda^\pm$ を**散乱係数**とよぶ．

$\psi_\lambda^\pm$ は $\lambda \notin \boldsymbol{R}$ において正則となり，$m_\lambda^\pm, g_\lambda$ もそうである．(48)に $g_\lambda$ の正則性を用い積分路を変形すると(図6．遠方の寄与は無視できるとわかる)

$$\begin{aligned}\delta(x-y) &\overset{(48)}{=} \int_{\boldsymbol{R}} (g_{\lambda-i0}(x, y) - g_{\lambda+i0}(x, y))\, \frac{d\lambda}{2\pi i} \\ &\overset{(50)}{=} -\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} g_{\lambda+i0}(x, y)\, \frac{d\lambda}{\pi}.\end{aligned} \tag{52}$$

$m_\lambda^\pm$ を用いて $g_\lambda$(45)を表す．分母から考えると

$$W[\psi_\lambda^-, \psi_\lambda^+] = \begin{vmatrix} c_\lambda + m_\lambda^- s_\lambda & c_\lambda + m_\lambda^+ s_\lambda \\ c_\lambda' + m_\lambda^- s_\lambda' & c_\lambda' + m_\lambda^+ s_\lambda' \end{vmatrix}_{x=0} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m_\lambda^- & m_\lambda^+ \end{vmatrix} = m_\lambda^+ - m_\lambda^-,$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad g_\lambda(x, y) &= \frac{1}{m_\lambda^+ - m_\lambda^-}\{Y_{x-y}(c_\lambda + m_\lambda^+ s_\lambda)(x)(c_\lambda + m_\lambda^- s_\lambda)(y) \\ &\qquad + Y_{y-x}(c_\lambda + m_\lambda^- s_\lambda)(x)(c_\lambda + m_\lambda^+ s_\lambda)(y)\} \\ &= \frac{1}{m_\lambda^+ - m_\lambda^-}[c_\lambda(x), s_\lambda(x)] M_\lambda \begin{bmatrix} c_\lambda(y) \\ s_\lambda(y) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

$$\left( M_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & Y_{x-y}m_\lambda^- + Y_{y-x}m_\lambda^+ \\ Y_{x-y}m_\lambda^+ + Y_{y-x}m_\lambda^- & m_\lambda^+ m_\lambda^- \end{bmatrix} \right)$$

$\lambda \in \boldsymbol{R}$ のとき $\boldsymbol{e}_\lambda(x) := \begin{bmatrix} c_\lambda(x) \\ s_\lambda(x) \end{bmatrix}$ は実数値ゆえ

$$\mathrm{Im}\, g_{\lambda+i0}(x, y) = {}^t\boldsymbol{e}_\lambda(x)\, \mathrm{Im} \left( \frac{M}{m^- - m^+} \right)_{\lambda+i0} \boldsymbol{e}_\lambda(y)$$

となる(右辺の Im は各成分の虚数部分の意味)．$M_\lambda$ の$(1, 2)$成分を

$$Y_{x-y}m_\lambda^- + Y_{y-x}m_\lambda^+ = m_\lambda^- - Y_{y-x}(m_\lambda^- - m_\lambda^+)$$

と書けば，$m_\lambda^+ - m_\lambda^-$ でわり虚部をとると $m_\lambda^-$ だけが残る．$(2, 1)$成分で同様にすると $m_\lambda^+$ が残り

$$\mathrm{Im} \frac{M_\lambda}{m_\lambda^+ - m_\lambda^-} = \mathrm{Im} \frac{1}{m_\lambda^+ - m_\lambda^-} \begin{bmatrix} 1 & m_\lambda^- \\ m_\lambda^+ & m_\lambda^+ m_\lambda^- \end{bmatrix} (=: N_\lambda \text{ とおく}). \tag{53}$$

**定理 45 (一般展開定理)**　(53)を(52)に代入すれば

$$\delta(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} {}^t\boldsymbol{e}_\lambda(x) N_{\lambda+i0} \boldsymbol{e}_\lambda(y) \frac{d\lambda}{\pi}.$$

つまり任意の関数 $f$ を，$\lambda$ のベクトル値関数

$$\boldsymbol{e}_\lambda(f) := \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{e}_\lambda(y) f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} c_\lambda(y) \\ s_\lambda(y) \end{bmatrix} f(y)\, dy$$

に(積分が意味をもつ限り)変換すると

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} {}^t\boldsymbol{e}_\lambda(x) N_{\lambda+i0} \boldsymbol{e}_\lambda(f) \frac{d\lambda}{\pi} \tag{54}$$

と逆変換できる．この表示で $H$ の作用は対角化され

$$Hf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} {}^t\boldsymbol{e}_\lambda(x) \lambda N_{\lambda+i0} \boldsymbol{e}_\lambda(f) \frac{d\lambda}{\pi}.$$

□

---

**注意**　$N(\lambda)$ の分母 $m_\lambda^- - m_\lambda^+$ が 0 になる $\lambda$ は実数に限られ，そのときのみ ($\phi_+ = \phi_-$ は $\pm\infty$ で 0 に収束し) $\phi_\lambda^\pm \in L^2(\boldsymbol{R})$ となる．このような $\lambda = \lambda_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ があるときは((48)に戻って考え)，(54)は離散的な和

$$\sum_n {}^t\boldsymbol{e}_{\lambda_n}(x) \mu_n M_{\lambda_n} \boldsymbol{e}_n(f)$$

($\mu_n := 2\, \mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_n} (m_\lambda^- - m_\lambda^+)^{-1}$) を含むと解釈する．　□

---

具体的に散乱係数を求めることができる場合として，たとえば $u(x) =$

$k\cosh^{-2}(x)$ がある．興味を覚えた読者は試みられたい．［ヒント：**フーリエ変換**を再現する $k=0(u\equiv 0)$ のとき以外は，$\left(X=\dfrac{1+\tanh x}{2}\right.$ と変換し）超幾何関数の接続公式を用いる[7)]．］

**問** （i） 補題1に基き，デルタ関数の微分を

$(\delta', f) = -(\delta, f')$（十分遠方で0である任意の関数 $f$ について）

をみたすものとして導入する．このとき $x\delta'(x) = -\delta(x)$ を示せ．

（ii） ポテンシャル $u$ が恒等的に0の場合 $\left(-\dfrac{d^2}{dx^2}\varphi = \lambda\varphi\right)$ を考える．

ア） $\varphi_\lambda^\pm, c_\lambda, s_\lambda, m^\pm(\lambda)$ を求めよ．

イ） ア)を用いて定理45を書き下し，次の式を得ることを確かめよ．

$$\delta(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)}\frac{dk}{2\pi}$$

すなわち(少くとも形式的には)，任意の関数 $f$ に対し

$$\hat{f}(k) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} f(y)\,dy$$

とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\hat{f}(k)\frac{dk}{2\pi} = f(x)$$

である(フーリエ変換)．

本書では平面ベクトルの1次変換からはじめて，最後は無限次元の線型代数として量子力学にも触れてみた．線型代数にはいろいろな側面と背景があるが，量子力学はその中できわだった華のひとつであろう．

## 道案内

1）　量子力学の定式化について，根源的説明はディラック『量子力学』(岩波書店，原著初版 1930)，米谷民明『量子論入門講義』(培風館，1998)などの書を参照されたい．

2）　1)のディラック，第Ⅴ章参照．なお $H(p,x)$ が(たとえば)項 $px$ を含むとき，これを $xp$ とみると(11)の右辺は異なってくるが，ここでは立ち入らない．

3）　シュレディンガーの原論文(1926)の題名は「固有値問題としての量子化(I-Ⅳ)」であった(戸田盛和『量子力学 30 講』朝倉書店(1999)，pp. 73-75 を参照)．

量子力学では，物理量を表す作用素たちは一般に非可換で同時対角化できず，これが不確定性原理に直結する．コヒーレント状態 $\varphi_a$ は(波の幅(分散)を指定したとき)位置と運動量の不確定性が最小の状態である．

加野泰『コヒーレンス理論とその応用』岩波書店(1976)

参照．

4）　内積(9)を $f$ できまる $g$ の関数と見て，$f^*$ と書こう．

$$f^* := (f, \cdot) : L^2(\boldsymbol{R}) \ni g \mapsto (f, g) \in \boldsymbol{C} \tag{34}$$

$f^*(=\langle f|)$ は $g$ について線型である．$\psi = \sum u_j(u_j, \psi)$ は $1 = \sum_j u_j \otimes u_j^*$ (「1の分解」，§17.4)とも書ける．

5）　(42)が作用する関数の定義域を $\boldsymbol{R}$ 全体でなく有限区間で考えてもよいが，その場合(43)の解の境界条件も適切に考える必要がある．

6）　これらは Jost(ヨスト)解とよばれる．くわしくは以下を参照されたい．

加藤祐輔『散乱問題における逆問題』岩波応用数学叢書，岩波書店(1983)

田中俊一・伊達悦朗『KdV 方程式』紀伊国屋書店(1979)

7）　一般展開定理の実例については，

吉田耕作『積分方程式論』岩波全書，岩波書店(1978)

小谷眞一・俣野博『微分方程式と固有関数展開』岩波講座・現代数学の基礎，岩波書店(2001)

なお公式(54)は今日の観点からもあらためて興味深い：『現代数学のひろがり 1』(岩波講座・現代数学の基礎)所載の，青本和彦先生の稿など．

8）　基礎理論としての量子力学は，その後量子場の理論へと発展し，物質と空間が相互にわかちがたい存在であることが認識された．ただしいわゆる「発散の困難」をはじめ，数学的にも物理学的にも大きな挑戦が待たれている．

このような探究の現状に興味のある読者のため，世紀の節目に編まれた次の本を最後にあげておこう．

B. エンクウィスト他編(砂田利一日本語版監修)『数学の最先端・21 世紀への挑戦』Volume 1-4，シュプリンガー・フェアラーク東京(2002～2004)

# 付録

## 1. 複素数および体の公理

その中で加減乗除が自由にできる集合を体とよぶ．公理を述べておこう．

**定義 A**　集合 $F$ に加法(和)＋と乗法(積)・とよばれる 2 つの演算があり以下がみたされるとき，$F$ を**体**(たい；英 Field, 独 Körper)とよぶ．$F$ の元を $a, b, \cdots$ で表す．

加法の公理
- (i) $a+b=b+a$ (交換法則)
- (ii) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (結合法則)
- (iii) 特別な元 $0\in F$ があり，どんな $a$ に対しても $a+0=a$ となる．(ゼロの存在)
- (iv) 各 $a$ に対し，$a+a'=0$ となる元 $a'$ が存在する．これを $-a$ と書く．(逆元の存在)

乗法の公理
- (i)′ $a\cdot b=b\cdot a$ (交換法則)
- (ii)′ $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ (結合法則)
- (iii)′ 特別な元 $1\in F$ が存在し，どんな $a$ に対しても $a\cdot 1=1\cdot a=a$ となる．(乗法に関する単位元の存在)
- (iv)′ 各 $a$ に対し，$a\cdot a'=a'\cdot a=1$ となる元 $a'$ が存在する．これを $a^{-1}$ と書く．(逆元の存在)

分配法則　$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$. □

---

通常「$F$ に演算があり」と言えば，それだけで $F$ がその演算で閉じる(演算の結果がまた $F$ の元である)ことも要請する．なお乗法の・は省くことが多い．

---

自然数の全体 $\boldsymbol{N}$ は加法と乗法をもつ(和と積で閉じる)が，どちらについても逆元で閉じない(たとえば積については，$1^{-1}=1$ 以外の逆元は自然数でない！)ので体でない．加法について逆元をとれるようにしたのが整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ であり，さらに乗法について 0 以外の元の逆元を考えると有理数全体(**有理数体**) $\boldsymbol{Q}$ を得る．

有理数を定式化するためには，まず整数の組の集合 $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}_{\neq 0}:=\{(m,n)\mid m,n\in\boldsymbol{Z},n\neq 0\}$ を考える．そして2つの元に次の関係があれば「同じもの」とみなす．

$$(m,n)\sim(m',n'):\Longleftrightarrow mn'=m'n.$$

(「同じものとみる」を～で表した：付録3参照)これは $m/n=m'/n'$ という気持ちである．こうして得られる「もの」全体(商ベクトル空間をつくるのと同様，上の関係で「商集合」をつくる：$\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}_{\neq 0}/_{\sim}$ と書く)が有理数の集合というわけである．

---

実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$，複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ も体であり，実数体，複素数体とよばれる．複素数について確認しつつ，体の例を挙げよう．

**例1 (複素数体)** 2次方程式は係数が実数であっても実数解をもつと限らないが，複素数の範囲ならば解をもつことを知っているであろう．$i$ を2乗して $-1$ となる文字とし，$a+bi$ ($a,b$ は実数) の形の式の和と積を

$$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i$$
$$(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$$

で定めた．$(a+bi)(a'+b'i)=(a'+b'i)(a+bi)$ であり，加法の単位元は $0=0+i0$，乗法の単位元は $1=1+i0$ である．

$z=a+bi$ の**複素共役** $\bar{z}=a-bi$ を考えると

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$$

であることから，$a+bi\neq 0$ ならば逆数がある：$(a+bi)^{-1}=\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$. 複素数の全体 $\boldsymbol{C}=\{a+bi\mid a,b \text{ は実数}\}$ は1つの体である．

実数が数直線上の点で表されたように，複素数 $z=a+bi$ は平面(**複素数平面**)上の点 $(a,b)$ で表すことができる．$a$ を $z$ の**実部**，$b$ を**虚部**といい，それぞれ $\mathrm{Re}\,z$，$\mathrm{Im}\,z$ で表す．$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\bar{z}}$ を $z$ の**絶対値**といい $|z|$ と書く．これは $z$ の原点0からの距離である．

$r$ を実数とすれば $r(a+bi)=ra+rbi$ である．$r=\sqrt{a^2+b^2}^{-1}=\dfrac{1}{|z|}$ とすれば $\sqrt{a^2+b^2}^{-1}(a+bi)=\dfrac{z}{|z|}$ は絶対値が1(単位円周上)となる．このような複素数は $\cos\theta+i\sin\theta$ と表せるから，

$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

である．これを $z$ の**極表示**といい，一般角 $\theta$ を $z$ の**偏角**という．極表示でみると，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$ の積は

$$\begin{aligned} zz' &= rr'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= rr'\{(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')\} \\ &= rr'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')). \end{aligned}$$

つまり $zz'$ の絶対値はそれぞれの絶対値の積，偏角はそれぞれの偏角の和となる．とくに $z^n = 1$ の解 $z$ は（$|z^n| = |z|^n = 1$ より $|z| = 1$ に注意）

$$z = \cos\frac{2\pi j}{n} + i\sin\frac{2\pi j}{n} \qquad (j = 0, 1, \cdots, n-1)$$

すなわち，単位円の $n$ 等分点で与えられる．複素数の範囲では，2 次方程式のみならず一般に $n$ 次方程式が必ず解をもつことが知られている（ガウスによる**代数学の基本定理**）．

**例 2** 元の数が有限（有限集合）である体を**有限体**という．例として，

$$F_p := \{0, 1, \cdots, p-1\} \qquad (\text{ただし } p \text{ は素数})$$

がある．ここで $F_p$ における加法と乗法は次のものとする：

$$\begin{aligned} &a+b := (\text{自然数としての和 } a+b \text{ を } p \text{ で割った余り}) \\ &ab := (\text{自然数としての積 } ab \text{ を } p \text{ で割った余り}) \end{aligned} \qquad (1)$$

たとえば $p = 2$ のとき，$F_2$ の和と積は下の表にまとめられる．これは偶数を 0，奇数を 1 と表したときの計算規則にほかならない．

| + | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| × | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

$F_p$ を位数 $p$ の**ガロア体**とよぶ．なお素数でない $p = mn$ について同様に積を考えると，(1) より $mn = 0$ であり $m, n$ が逆数をもたない．

**例 3（(1 変数)有理関数体）** 有理数は整数の比（分数）からなる集合であった．類似として，体 $\boldsymbol{F}$ の元を係数とする 1 変数の多項式の比（有理式）

$$\frac{p(x)}{q(x)} \qquad (q(x) \neq 0)$$

の全体を考える．すると加法と乗法で閉じ，$0\left(= \dfrac{0}{1}\right)$ 以外は逆元 $\dfrac{q(x)}{p(x)}$ をもつ．これを 1 変数有理関数体とよび，$\boldsymbol{F}(x)$ と表す． □

集合 $F$ において，体の公理のうち乗法に関する可換性(交換法則，(i)′)のみ成り立たず，このほかは成り立つとき，$F$ を**斜体**(**非可換体**)とよぶ．

体および斜体においては 0 でない元で割り算ができるから(条件 (iv′))，$ab = ab'$，$a \neq 0$ ならば $b = b'$ が(行列と異なり)結論できる．

**例 4** (**斜体の例：4 元数体**)　$i, j, k$ を 2 乗すると $-1$ となる文字とし

$$\boldsymbol{H} := \{a+bi+cj+dk \mid a, b, c, d \text{ は実数}\}$$

とおく．$z = a+bi+cj+dk$，$z' = a'+b'i+c'j+d'k \in \boldsymbol{H}$ の和と積を

$$z+z' = (a+a')+(b+b')i+(c+c')j+(d+d')k$$

および $ij = -ji = k, jk = -kj = i$，$ki = -ik = j$ で定める．すなわち

$$zz' = a(a'+b'i+c'j+d'k)+b(a'i-b'+c'k-d'j)$$
$$+c(a'j-b'k-c'+d'i)+d(a'k-b'j-c'i-d').$$

$\boldsymbol{H}$ をハミルトンの **4 元数体**とよぶ．ベクトル空間としては $\boldsymbol{R}^4$ と同型で，

$$(a+bi+cj+dk)(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2$$

なので $0 = 0+0i+0j+0k$ 以外は乗法について逆元をもつ．　□

---

複素数をこえる数の集合をさがしても，4 元数体で「うちどめ」になることがわかっている．(結合法則をあきらめれば，ケーリーの 8 元数とよばれるものがある．)

4 元数を成分とする数ベクトルについては，右スカラー倍と左スカラー倍の結果が異なるため注意を要する．左からの行列 $A$ 倍に対しては，右スカラー倍のみが

$$A(\boldsymbol{v}k+\boldsymbol{w}l) = (A\boldsymbol{v})k+(A\boldsymbol{w})l \qquad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}^n,\ k, l \in \boldsymbol{H})$$

をみたす．(左スカラー倍を考えたのでは，左からの行列倍が線型写像でない！)

---

加法と乗法が定義されて(これらで閉じて)いるが，自然数の全体 $\boldsymbol{N}$ のように，体の公理における単位元や逆元の存在が保証されない集合がある．このような集合を**環**(ring)とよぶ．環においては(通常)結合法則は要請するが，積に関する可換性や，単位元や逆元の存在は必ずしも仮定しない．

**例 5**　体 $F$ の元を係数とする $x$ の多項式の全体 $F[x] = \{c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n \mid c_i \in F\}$ は環である(**1 変数多項式環**，17 章)．多項式は有限和だが，形式的な無限和(**形式べき級数**) $c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n+\cdots$ の全体を考え，ここに和と積を同様に定めることもできる．これを**形式べき級数環**とよび

$F[[x]]$ と表す．

$F$ の元を成分とする $n$ 次行列の全体 $M_{n,n}(F)$ も環である(**全行列環**)．

なお以上において，$F$ 自身も体でなく環で十分である． □

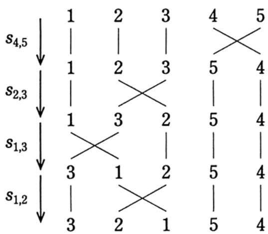
## 2. 置換の符号

置換どうしは写像の合成で積が考えられる($(\sigma\circ\tau)(j)=\sigma(\tau(j))$．以下∘は略そう)．§11.3 の記法を使えば，たとえば次のとおりである：

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&5&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4&3&2&1\\4&5&1&2&3\end{pmatrix},$$

$$\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{pmatrix}\Longrightarrow\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&1&2&3\end{pmatrix}.$$

($\tau$ の下段と $\sigma$ の上段をそろえた上で，$\tau$ の上段と $\sigma$ の下段を並べた．) 2 つの文字 $i,j$ $(i\neq j)$ のみを入れ換える置換を**互換**という．これを $s_{i,j}(=s_{j,i})$ と書こう．置換はかならず互換の積(合成)で書ける．置換は数をいれかえるアミダくじであり，アミダくじは隣どうしを入れ換えることでできるから，これは明らかである．上の例では $\sigma=s_{1,2}s_{1,3}s_{2,3}s_{4,5}$ である．




($s_{1,2}$ を「1番目と2番目」でなく「1と2」の入れ換えとしているので注意．)

ここで 3 以下と 4 以上とは互いに無関係に変化するから，$s_{4,5}$ を動かして $\sigma=s_{1,2}s_{4,5}s_{1,3}s_{2,3}=s_{4,5}s_{1,2}s_{1,3}s_{2,3}$ とも書ける．$s_{1,2}s_{1,3}s_{2,3}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=s_{1,3}=s_{2,3}s_{1,3}s_{1,2}$ なので，$\sigma=s_{4,5}s_{1,3}=s_{4,5}s_{2,3}s_{1,3}s_{1,2}$ でもある．

置換 $\sigma$ の符号 $\operatorname{sgn}\sigma$ は，11 章では上のような図における × 印の数(すなわち，使った互換の個数)$N$ を用いて，$(-1)^N$ と定めた．(上では $N=4, \operatorname{sgn}\sigma=(-1)^4=1$ である．) ただし置換を互換の積で書く書きかたによらず，個数 $N$ の偶奇が一定であることを確かめていなかった．ここ

では符号の別の表示を与え，符号が確かに置換できまることを示そう．

次の比($x_1, \cdots, x_n$ の有理式)を考える．

$$\varepsilon(\sigma) := \prod_{1 \leqq k < l \leqq n} \frac{x_{\sigma(k)} - x_{\sigma(l)}}{x_k - x_l} \tag{2}$$

ここで $\prod$ は積の記号であり，$\prod_{1 \leqq k < l \leqq n}$ は $1 \leqq k < l \leqq n$ をみたす自然数の組 $(k, l)$ についての積を意味する：$n = 3$，$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ならば

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_3)} = (-1)^3 = -1.$$

このように，(2)は分母子とも変数 $x_1, \cdots, x_n$ のうち相異なるものの差の積(差積)なので，割り切れて $\sigma$ ごとに $+1$ か $-1$ になる．

互換 $s_{i,j}$ $(i < j)$ については，変化する(2)の因子 $(x_k - x_l)(k < l)$ は

$l = i$ のとき：$(x_1 - x_i)$，　$\cdots$，　$(x_{i-1} - x_i)$

$k = i$ のとき：$(x_i - x_{i+1})$，$\cdots$，$(x_i - x_j)$，$\cdots$，$(x_i - x_n)$

$l = j$ のとき：$(x_1 - x_j)$，$\cdots$，$(x_i - x_j)$，$\cdots$，$(x_{j-1} - x_j)$

$k = j$ のとき：$(x_j - x_{j+1})$，　$\cdots$，　$(x_j - x_n)$

である．このうち $(x_i - x_j)$ は2回数えられているので，これを除いた積

$$(-1)^i \prod_{l \neq i,j} (x_i - x_l) \times (x_i - x_j) \times (-1)^{j-2} \prod_{l \neq i,j} (x_j - x_l)$$

が $s_{i,j}$ で変化する部分である．$s_{i,j}$ を施すと

$$(-1)^i \prod_{l \neq i,j} (x_j - x_l) \times (x_j - x_i) \times (-1)^{j-2} \prod_{l \neq i,j} (x_i - x_l)$$

となるが，これは $(x_i - x_j)$ が $-1$ 倍になった他は全体として変化がない．

$$\therefore \quad \varepsilon(s_{i,j}) = -1. \tag{3}$$

**補題**　$\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$．

**証明**　$n$ 変数の多項式 $f(x_1, \cdots, x_n)$ に対し，変数を $\sigma$ で置換した多項式を $\sigma f$ と書こう．$(\sigma f)(x_1, \cdots, x_n) := f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$ である．(2)は差積 $D = \prod_{k<l} (x_k - x_l)$ と $\sigma D = \prod_{k<l} (x_{\sigma(k)} - x_{\sigma(l)})$ との比だから，$\varepsilon(\sigma)$ は

$$\sigma D = D \cdot \varepsilon(\sigma)$$

で定まっている．さて，単項式ごとに

$$(\sigma\tau)(x_j) = x_{(\sigma\tau)(j)} = x_{\sigma(\tau(j))} = \sigma(x_{\tau(j)}) = \sigma(\tau(x_j)) \tag{4}$$

であるから，$(\sigma\tau)(f) = \sigma(\tau f)$ である．よって

$$D\varepsilon(\sigma\tau) = (\sigma\tau)D \overset{(4)}{=} \sigma(\tau D) = \sigma(D\varepsilon(\tau)) = (\sigma D)\varepsilon(\tau)$$

$$= D\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau). \qquad \square$$

とくに，任意の置換 $\sigma$ を $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_N$（互換の積）と表せば

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma_1)\cdots\varepsilon(\sigma_N) \overset{(3)}{=} (-1)^N$$

となるから，結局 $\varepsilon(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ である．$\varepsilon(\sigma)$ は $\sigma$ を互換の積に分解することなく定義されているから，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ も互換に分解する仕方によらない．（したがって分解に用いる互換の個数 $N$ の偶奇も一定である．）また

$$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}\,\sigma$$

であることも，$\sigma\sigma^{-1} = id$（恒等写像，$id(j) = j$）の符号が 1 であることと

$$\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(id) = 1$$

より（再度）わかる．

## 3. 同値関係と商集合

整数の組 $(m, n)$ を考え，これらの「比」が同じときに同じものと考えることで有理数が得られた（付録 1）．このように，1 つの集合からある規則にしたがって 2 つ以上の「もの」を「同じ」とみなすことで，新たな数学的対象を構成することができる．ここで一般的に述べておこう．

集合 $X$ における**関係** $\sim$ とは，$X$ の任意の 2 元 $x, y$ に対し，$x \sim y$ であるか $x \not\sim y$ であるか，どちらか一方が定まることをいう．これは $X \times X$ の部分集合 $\{(x, y) \in X^2 \mid x \sim y\}$ を指定することともいえる．たとえば数直線 $\boldsymbol{R}$ の大小関係 $<$ は，半平面 $\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x < y\}$ で定まる．

**定義 B**　集合 $X$ における関係 $\sim$ が任意の $x, y, z \in X$ に対して次をみたすとき，**同値関係**という．

（i）<u>反射律</u>　$x \sim y$

（ii）<u>対称律</u>　$x \sim y \Longleftrightarrow y \sim x$

（iii）<u>推移律</u>　$x \sim y,\ y \sim z \Longrightarrow x \sim z$ $\square$

$\boldsymbol{R}$ における大小関係は(i), (ii)をみたさず，同値関係でない．

一方0でない実数全体 $\boldsymbol{R}^\times = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \neq 0\}$ において，$x \sim y$ とは $xy > 0$ のことと定めると，$\sim$ は(i), (ii), (iii)をみたし同値関係である．もちろんこれは，「$x$ と $y$ を正負が同じとき同じ」とみなす関係である．「正の数」を $+$ で，「負の数」を $-$ で表せば，符号からなる集合 $\{+, -\}$ を得る．一般にも：

**定義 C**　集合 $X$ に同値関係 $\sim$ があるとする．$x \in X$ に対し，$[x]$ で $x$ と同値な元 $y (\sim x)$ の全体を表そう：

$$[x] := \{y \in X \mid y \sim x\} \subset X \qquad ([x] \text{ は } X \text{ の部分集合である}).$$

$[x]$ を $x$ が定める**同値類**(簡単に，$x$ の類)とよぶ．すべての同値類を集めた集合を $X/_\sim$ で表し，$X$ の同値関係 $\sim$ による**商集合**とよぶ：

$$X/_\sim := \{[x] \mid x \in X\}.$$

商集合 $X/_\sim$ を作ることを，$X$ を $\sim$ により**同値類別**するともいう．□

**例 6**　**ア)**　$\boldsymbol{R}^\times$ における「符号が同じ」関係 $\sim$ に対し，上に述べたように $\boldsymbol{R}^\times/_\sim = \{+, -\}$．これは $+ = \{x \mid x > 0\} = [+1]$ などと書いたことになる．また，この関係の下では $[-1] = [-2] = -$ である．

このように，ひとつの類 $[x] \in X/_\sim$ の元に対し，$x$ は1つにきまるとは限らない．$[x] = [y]$ である $y \in X$ を，類 $[x]$ の**代表元**とよぶ．上の場合，$-1$ も $-2$ も類 $-$ の代表元である．$x \in X$ に $[x] \in X/_\sim$ を対応させる写像 $[\cdot] : X \to X/_\sim$ $([\cdot](x) = [x])$ を**標準射影**または**自然な全射**という．

**イ)**　付録1では，$X = \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}_{\neq 0}$ を同値類別し有理数体 $\boldsymbol{Q}$ を構成した．

**ウ)**　$\boldsymbol{R}^n$ の(順序)基底 $(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ の全体を $M_n^\times$ とし，同値関係を

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \sim B = (\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$$

$:\Longleftrightarrow A$ から $B$ へ，基底のまま連続変形できる

で定める．$M_n^\times/_\sim$ は，「向き」が同じ基底を同じとみた集合で，ア)と同様2元からなる(一方を「正」とよべば，他方を「負」とよべる：§7.4, 12.3)．

**エ)**　$\boldsymbol{K}$ は体(定義 A)とし，$(m, n)$ 型行列 $A, B \in M_{m,n}(\boldsymbol{K})$ に対し

$A \sim B :\Longleftrightarrow \boldsymbol{K}$ の元を成分とする可逆行列 $P, Q$ があり，

$$A = PBQ$$

と定めると，$M_{m,n}(\boldsymbol{K})$の同値関係となる(確かめよう)．このとき $A \sim B$ は，階数が等しい ($\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$) ことと同値である(§ 8.4)．

**オ)** $n$ 次行列 $A, B \in M_{n,n}(\boldsymbol{K})$ に対し，次の同値関係も考えられる．

$$A \approx B \overset{\cdot}{:}\Longleftrightarrow \boldsymbol{K} \text{ の元を成分とする可逆行列 } P \text{ があり，}$$
$$A = PBP^{-1}$$

このとき $A$ と $B$ は**相似**(similar)であるともいう．$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ ならば，$A \approx B$は同じジョルダン標準形をもつことと同値である(§ 13.4，18 章)．

**カ)** $V, W$ はともに $\boldsymbol{K}$-ベクトル空間とする．これらの同型(同型写像が存在する) $V \cong W$ は，$\boldsymbol{K}$-ベクトル空間全体 $\boldsymbol{Vec_K}$ に同値関係を定める．少くとも有限次元ならば，$V \cong W$ は次元が等しいことと同値であった(14 章，定理 30)．

**キ)** § 16.2 では，平面 $\boldsymbol{R}^2$ の射影変換(1 次分数変換)を考えた．$\boldsymbol{R}^3$ の原点を通る 1 つの直線上の点を，原点を除きすべて同じ点と考え，$\boldsymbol{R}^2$ の無限遠点が扱える．すなわち $\boldsymbol{R}^3_{\neq \boldsymbol{0}} := \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \mid \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\}$ の 2 元について

$$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}' \overset{\cdot}{:}\Longleftrightarrow \text{実数 } k \neq 0 \text{ があり，} \boldsymbol{x}' = k\boldsymbol{x}$$
(同じ直線を定めれば同じ！)

と考え，商空間 $\boldsymbol{P}^2 := \boldsymbol{R}^3_{\neq \boldsymbol{0}}/_{\sim}$ (視線全体の集合)を考えた．$\boldsymbol{P}^2$ を(実)**射影平面**という(projective plane. 方向のみ考えたので，空間 $\boldsymbol{R}^3_{\neq \boldsymbol{0}}$ を類別し「平面」ができる)．可逆な 3 次行列による 1 次分数変換は，$\boldsymbol{P}^2$ から $\boldsymbol{P}^2$ の写像を定める．$n$ 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{R}^{n+1}_{\neq \boldsymbol{0}}/_{\sim}$ も同様に得られる．

**ク)** § 17.2 で定義した商ベクトル空間 $V/W$ も商集合の例であり，$V$ の 2 元 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'$ の同値関係を $\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{v}' \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \in W$ で定めたことになっている．

# 参考書

●解析(微積分)に関する標準的な本として，本書では必要に応じて次を引用した．

高木貞治『解析概論』岩波書店(第3版1961，軽装版1983)

●線型代数についても標準的教科書をあげておく．本書の記述の不足はこれらで補うことができるであろう．

佐武一郎『線形代数学』裳華房(1958)

齋藤正彦『線型代数入門』,『線型代数演習』東大出版会(1966, 1985)

これらは線型代数における高木貞治『解析概論』にあたる本であり，日本における線型代数の標準を作ったといえるだろう．より最近のものとして，

永田雅宜(代表著者)『理系のための線型代数の基礎』紀伊國屋書店(1986)

砂田利一『行列と行列式』岩波書店(2003)

前者は論理が透明であり，後者は丁寧で計算例も詳しい．

A. I. Kostrikin, Yu. I. Manin "*Linear Algebra and Geometry*" Gordon and Breach Science Publishers(1997，原著ロシア語版1986)

M. L. Mehta "*Matrix Theory——Selected topics and useful results*" Hindustan Publishing (1989)

やはり比較的最近の，それぞれ特色のある英語圏の本．前者は代数学的側面について，後者は解析学的側面について詳しい．

●線型代数が実際に用いられるときは，幾何学的なパラメータを含んでいたり，行列が大規模であったり，プログラムのため精密な分解を考えたり，成分が有限体の元であったり，と多様である．ここでは入門書として

有木進『工学がわかる線形代数』日本評論社(2000)

をあげよう．また次の書では制御工学において線型代数が活躍する様が紹介されている．

前田肇『線型システム』朝倉書店(2001)

このほか，7章末に挙げた書も参考となるであろう．

●線型代数と関連しつつより進んだ代数学への入門書をあげる．

山内恭彦・杉浦光夫『連続群論入門』培風館(1960)

横田一郎『群と位相』,『群と表現』裳華房(1971, 1973)

行列のなす群の性質，および応用上必要となる表現論の基礎的知識が述べられている．

堀田良之『加群十話』朝倉書店(1988)，『代数入門』裳華房(1987)

前者は読物的，後者は標準的な教科書であり，いわゆる代数解析学の一端が紹介されている．代数系一般については次の本がすばらしい．

シャファレビッチ(蟹江幸博訳)『代数学とは何か』シュプリンガー・フェアラーク東京(2001，原著1984)

そのほか，もちろん各章の「道案内」で紹介した本もおすすめである．

# 問題略解

## 1章

**§1.2** （i） $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$ なら

$$\left[A\begin{bmatrix}b_{11}\\ b_{21}\end{bmatrix}, A\begin{bmatrix}b_{12}\\ b_{22}\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}=AB.$$

（ii） $C=[\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2]$ とする．$(AB)C=[(AB)\boldsymbol{c}_1, (AB)\boldsymbol{c}_2]$, $A(BC)=A[B\boldsymbol{c}_1, B\boldsymbol{c}_2]=[A(B\boldsymbol{c}_1), A(B\boldsymbol{c}_2)]$．$(AB)\boldsymbol{c}=A(B\boldsymbol{c})$ より両者は等しい．

**§1.3** （i） （ア） $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix}$ （イ） $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3}-1\\ \sqrt{3}+1\end{bmatrix}$ （ウ） $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha\\ \sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha\end{bmatrix}$

（ii） $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ とするとき，$\begin{bmatrix}a\\ c\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}b\\ d\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ である．

**§1.4** (24), (25)ならば $f(k\boldsymbol{v}+l\boldsymbol{w})\overset{(24)}{=}f(k\boldsymbol{v})+f(l\boldsymbol{w})\overset{(25)}{=}kf(\boldsymbol{v})+lf(\boldsymbol{w})$．一方この式で $k=l=1$, $l=0$ とすれば(24), (25)をそれぞれ得る．

**§1.5** $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ の行き先を並べればよく，（i） $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ （ii） $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

**§1.6** （i） $k\neq 0$ ならば全単射．（よって逆があり，それが $k$ での割り算に他ならない．） $k=0$ ならば全射でも単射でもない． （ii） 単射だが全射でない．（単射なので $f(\boldsymbol{R})=\{f(x)\,|\,x\in\boldsymbol{R}\}=\{$正の実数$\}$ に限れば逆写像があり，それが対数関数．）

**練習問題 1-1** （i） $A=[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$, $A'=[\boldsymbol{a}_1', \boldsymbol{a}_2']$ とする．$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ とすれば，順に $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_1', \boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_2'$ を得て ⇒ がわかる．⇐ は明らか．

（ii） $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}'=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$ とする．$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $A'=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ とすれば順に $x=x'$, $y=y'$ を得て ⇒ がわかる．⇐ は明らか．

**1-2** 点 $(x, y)$ を $\theta=30°$ 回した点を $(x', y')$ とすれば $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=R(\theta)\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=R(-\theta)\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3}x'+y'\\ -x'+\sqrt{3}y'\end{bmatrix}$．(i)に代入して，$\frac{1}{2}(-x'+\sqrt{3}\,y')=\sqrt{3}\,x'+y'+3$, $\therefore\ -\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)x'+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)y'=3$．$\left(3=[-2, 1]\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right.$ とみて $=[-2, 1]\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\left[\frac{-2\sqrt{3}-1}{2}, \frac{-2+\sqrt{3}}{2}\right]\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$ とするとスマート．） (ii)も同様で，$\frac{1}{2}(-x'+\sqrt{3}y')=\frac{1}{4}(\sqrt{3}x'+y')^2=\frac{1}{4}(3x'^2+2\sqrt{3}x'y'+y'^2)$．（はじめはなかった $x'y'$ の項が現れる）．

**1-3** （i） $\boldsymbol{a}$ を通り方向ベクトル $\boldsymbol{d}\,(\neq\boldsymbol{0})$ の直線上の点は $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{d}$（$t$ は実数）とパラメータ表示できる．$f$ が1次変換なら $f(\boldsymbol{p})=f(\boldsymbol{a})+tf(\boldsymbol{d})$ で，$f(\boldsymbol{d})\neq\boldsymbol{0}$ なら $t$ が動くとき直線を描く．平行な2直線とは $\boldsymbol{a}$ のみが異なる直線のこと，それらは $f(\boldsymbol{d})$ を方向ベクトルとする平行な直線にうつる（一致する場合もある：§2.5参照）．

（ii）$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ で $x$ 軸は不変だが $y$ 軸は直線 $y=x$ にうつるなど，たくさんある．

**1-4**（i）$f(A\cup B)=\{f(x)\mid x\in A$ または $x\in B\}$ である．すなわち $y\in f(A\cup B)$ なら，$A$ または $B$ の元 $x$ があり $y=f(x)$．$x\in A$ なら $y\in f(A)$，$x\in B$ なら $y\in f(B)$ だから，$f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$．逆に $f(A\cup B)\supset f(A)$，$f(B)$ は明らかだから，$f(A\cup B)\supset f(A)\cup f(B)$．したがって $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$．集合の等式を示すには，このように 2 つの包含関係 $\subset$，$\supset$ を示すのが基本である．

（ii）$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$ だが，逆は必ずしも成り立たない：$X=\{1,-1\}$，$Y=\{0\}$ とし，$f(\pm 1)=0$ とする．このとき $f(\{1\})\cap f(\{-1\})=\{0\}$ だが，$\{1\}\cap\{-1\}=\emptyset$ だから $f(\{1\}\cap\{-1\})=\emptyset$．

**1-5**（i）(28)の対偶を書いただけである．（ii）$[f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}')\Rightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}']\Leftrightarrow[f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{0}]\Leftrightarrow[f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}]$．(移項が自由にできる！)

## 2章

**§2.1**（i）元 $x$ をとるごとに，$((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))=f(g(h(x)))$，$(f\circ(g\circ h))(x)=(f((g\circ h)(x))=f(g(h(x)))$ で等しい．

（ii）$A,B,C$ が表す線型写像を $f,g,h$ とする（$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ 等）．$(f\circ g)(\boldsymbol{x})=f(g(\boldsymbol{x}))=f(B\boldsymbol{x})=A(B\boldsymbol{x})=(AB)\boldsymbol{x}$ より $(f\circ g)(h(\boldsymbol{x}))=(AB)(C\boldsymbol{x})=((AB)C)\boldsymbol{x}$，また $(f\circ(g\circ h))(\boldsymbol{x})=f((g\circ h)(\boldsymbol{x}))=f((BC)\boldsymbol{x})=A((BC)\boldsymbol{x})=(A(BC))\boldsymbol{x}$．よって $(AB)C=A(BC)$．(成分計算によらずに示せた！)

（iii）$(AB)(CD)=((AB)C)D=(A(BC))D=A((BC)D)$．

**§2.2〜§2.4** 略．いずれも単純な計算である．

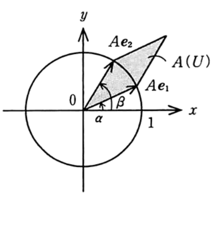
**§2.5** $\left|\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a' & b'\\c' & d'\end{bmatrix}\right|=(aa'+bc')(cb'+dd')-(ab'+bd')(ca'+dc')$，$\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a' & b'\\c' & d'\end{vmatrix}=(ad-bc)(a'd'-b'c')$．ともに展開すると等しい．

**§2.6** $|A|\neq 0$ なら逆行列がある．よってすべての $\boldsymbol{y}$ に対し $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ は解 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{y}$ を持ち，解はこれしかない．すなわち $A$ 倍は全射であり，単射である．逆をいうには(行列式が 0 なら単射でも全射でもない)を示せばよい．$|A|=|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}|=0$ ならある $k$ があり $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$（$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ のときだが他も同様）．すると $A$ による平面の像は直線となり全射でなく，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ があったから単射でない．

**練習問題 2-1**（i）ない．

（ii）$|A|=\sin(\beta-\alpha)\neq 0$ のとき

$$A^{-1}=\frac{1}{\sin(\beta-\alpha)}\begin{bmatrix}\sin\beta & -\cos\beta\\-\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$



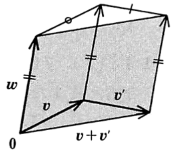

**2-2**（i）原点と点(3, 9)を結ぶ線分，面積は 0．

（ii）右図，面積は $|\sin(\beta-\alpha)|$．

**2-3**（i）それぞれ $ad-bc=-(bc-ad)$，

$\begin{vmatrix}ka+k'a' & b\\kc+k'c' & d\end{vmatrix}=k(ad-bc)+k'(a'd-bc')$．

(ii) 前者は $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ 倍と $[\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}]$ 倍では表裏が変わること(図2)を示す．後者は平行四辺形の面積が辺について線型性(加法性)をもつことを示す(右図)．




**2-4** (i) ア) 条件を並べて

$A\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}$，つまり $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}$.

イ) $A\begin{bmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}=E$，$A=\begin{bmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$.

(ii) 行列式はそれぞれ 3, −1 で，$U=\{(x, y)\,|\,0\leqq x,\ y\leqq 1\}$ の像の面積 3, 1 の 1 倍，−1 倍．これはア)は平面を裏返さないのに対し，イ)は裏返すことに対応する．

**2-5** (i) $A\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 5\\-3 & 4\end{bmatrix}$ より，$A=\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix}-1 & 12\\-5 & 11\end{bmatrix}$.

(ii) $A\begin{bmatrix}1 & k\\1 & 2-k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ より $A=\dfrac{1}{2-2k}\begin{bmatrix}2-k & -k\\-1 & 1\end{bmatrix}(k\neq 1)$．$k=1$ のとき $A$ は存在しない．

(iii) 方向ベクトルを $\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ に，また「始点」を $\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ にとれば，$l=\{\boldsymbol{x}=s\boldsymbol{d}+\boldsymbol{p}\,|\,s$ は実数$\}$ である．$l$ が $l$ にうつるということは，すべての $s$ に対してある $s'$ があって $A(s\boldsymbol{d}+\boldsymbol{p})=s'\boldsymbol{d}+\boldsymbol{p}$(同値)．よって $A\boldsymbol{d}$ は $\boldsymbol{d}$ のある実数倍だが，0 倍だと $l$ の像は 1 点になるから $A\boldsymbol{d}=\lambda\boldsymbol{d}\,(\lambda\neq 0)$．$A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ とすれば，これより $\dfrac{a+2b}{c+2d}=\dfrac{1}{2}$．一方 $A(\boldsymbol{p})$ がまた $y=2x+1$ の上にあるから $d=2b+1$．この 2 つから $A=\begin{bmatrix}a & b\\2a-2 & 2b+1\end{bmatrix}$，ただし $\lambda\neq 0$ より $a+2b\neq 0$.

**2-6** 図は $x$ がふたつの平行四辺形の面積の比できまることを示している．同様にして $y$ も面積の比となり，あわせて $\boldsymbol{x}$ が行列式のみで書ける．

## 3章

**§3.1** (i) ア) 基底でない． イ) すべての $\theta$ について基底である．

(ii) $X, Y$ を新しい座標とする．$\left[\boldsymbol{e}_1\left(\frac{\pi}{3}\right), \boldsymbol{e}_2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ に $\left[\boldsymbol{e}_1\left(\frac{\pi}{3}\right), \boldsymbol{e}_2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^{-1}=R\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ をかけ，それぞれ ${}^t[X, Y]=\left[\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right]$.

**§3.2** $A=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$．$AB=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix}$，$BA=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix}$ はそれぞれ原点を中心とする角 $2\theta$，$-2\theta$ の回転．

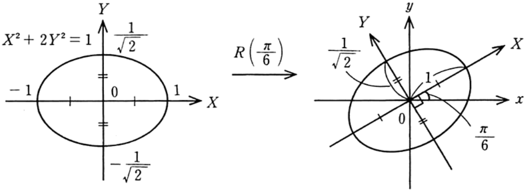
**§3.3** $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$ とすると ${}^t(AB)=$
$\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}\\a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{21}\\b_{12} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21}\\a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}$.

**§3.4** $P^{-1}BP$ は本文(§3.3)のように対角になる．

**§3.5** $|B-\lambda E|=(\lambda-4)(\lambda-8)$ より固有値は 4, 8．それぞれに対し固有ベクトルは

$\boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_8 = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ のスカラー倍. $B[\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_8] = [\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_8]\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ より, $P = [\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_8] = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ で $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ と対角化される.

**§3.6**　§3.5の問の $B$ により $4 = [x, y]B\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. $\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_8$ を長さ1にすれば, $P = R\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $B = R\left(\frac{\pi}{6}\right)\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}R\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} := R\left(-\frac{\pi}{6}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすれば $4 = [X, Y]\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = 4X^2+8Y^2$, つまり $X^2+2Y^2 = 1$. $X$ 軸, $Y$ 軸は $x$ 軸, $y$ 軸を $\frac{\pi}{6}$ 回転したものであり(同じ点の座標が $-\frac{\pi}{6}$ 回転を表わす行列倍だけになるということは, 座標軸のほうがそれだけ逆回転したことを意味する), 概形は下図.




**練習問題　3-1**　$0 = \det(A-\lambda E) = \lambda^2-\lambda-2$ を解き $\lambda = 2, -1$. $(A-2E)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$(の何倍でもよい). $(A+1E)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$(の何倍でもよい)とし $A[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = [2\boldsymbol{v}, -\boldsymbol{w}] = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. $\therefore$ $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ により $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A^n = \left(P\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}P^{-1}\right)^n = P\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^n P^{-1} = P\begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix}P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2^n+2(-1)^n & 2^n+(-1)^{n+1} \\ 2^{n+1}+2(-1)^{n+1} & 2^{n+1}+(-1)^n \end{bmatrix}$.

**3-2**　$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ とすれば $\mathrm{tr}\,AB = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ji} = \mathrm{tr}\,BA$. $B^{-1}$ があれば $\mathrm{tr}\,AB = \mathrm{tr}\,B(AB)B^{-1}$ と書け, $AB$ を $A$ と書き後者を得る.

**3-3**　$R(-\theta)BR(\theta) = \begin{bmatrix} a\cos^2\theta+b\sin 2\theta+c\sin^2\theta & b\cos 2\theta-\frac{a-c}{2}\sin 2\theta \\ b\cos 2\theta-\frac{a-c}{2}\sin 2\theta & a\sin^2\theta-b\sin 2\theta+c\cos^2\theta \end{bmatrix}$

が対角 ⇔ $b\cos 2\theta = \frac{a-c}{2}\sin 2\theta$. $b = 0$ なら $B$ がはじめから対角. $b \neq 0$ なら $\theta$ を $\cot 2\theta = \frac{a-c}{2b}$ に取れればよく(何度回すべきか $a, b, c$ できまる), cot はすべての実数値をとるからこれは可能である.

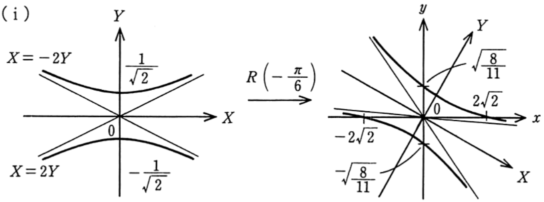
**3-4**　(i)　${}^tTT = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{v}_1 \\ {}^t\boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix}[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1 & {}^t\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2 \\ {}^t\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_1 & {}^t\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \\ (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2) \end{bmatrix}$ が $E$ に等しい ⇔ $|\boldsymbol{v}_j| = 1$, $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = 0$. また $|{}^tTT| = |E|$ に2章の乗法性と $|{}^tT| = |T|$ を用いれば $|T|^2 = 1$.　(ii)　$|A-\lambda E| = \lambda^2-\frac{5}{6}\lambda-\frac{25}{6} = \left(\lambda-\frac{5}{2}\right)\left(\lambda+\frac{5}{3}\right)$. 固有値 $\frac{5}{2}, -\frac{5}{3}$ の長さ1の固有ベクトルを求め $\boldsymbol{v} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ とおけば $T =$

$\pm[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$, $\pm[\boldsymbol{v}, -\boldsymbol{w}]$, $\pm[\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}]$, $\pm[\boldsymbol{w}, -\boldsymbol{v}]$ のどれでも $T^{-1}AT$ が対角となり，この8つが求めるもの．（うち $\pm[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$，$\pm[\boldsymbol{w}, -\boldsymbol{v}]$ が回転を表す．対角化の結果は前者では $\begin{bmatrix}\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3}\end{bmatrix}$，後者では $\begin{bmatrix}-\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}\end{bmatrix}$．）

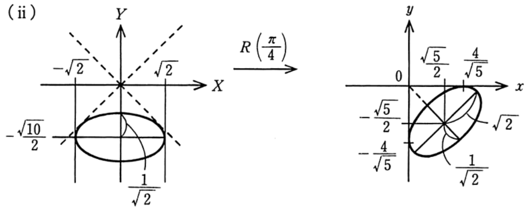
**3-5** $R = R\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$ で $R\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x' \\ y'\end{bmatrix}$ とすれば $\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} = {}^tR\begin{bmatrix}x' \\ y'\end{bmatrix}$，$1 = [x, y]\begin{bmatrix}3 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} = [x', y']R\begin{bmatrix}3 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}{}^tR\begin{bmatrix}x' \\ y'\end{bmatrix}$．したがって $R\begin{bmatrix}3 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}{}^tR = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5\end{bmatrix}$ より $a = \frac{3}{2}$，$b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$，$c = \frac{5}{2}$．

**3-6**

(i)




(ii)




## 4章

**§4.1** 本文(4)で $a = 1$，$b = 2$ とした行列が $A$ で，問題3-1で $A^n$ を求めた．$\boldsymbol{v}_n = A^n\boldsymbol{v}_0$ の第1成分に注目して $x_n = \frac{2^n+(-1)^n}{3}x_0 + \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}x_1$．

**§4.2** $|A-\lambda E| = (\lambda-1)^2$，固有ベクトルは $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}$ のスカラー倍のみで対角化不能．（または：対角化できればその結果は $1\cdot E$ にしかなれないが，$P^{-1}AP = E$ なら元々 $A = E$ で矛盾．）$(A-E)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$ となる $\boldsymbol{w}$ を探し $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix}-1 \\ 0\end{bmatrix}$，$(A-E)[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$．$P = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ により $P^{-1}AP = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$．

**§4.3** (i) 略． (ii) $|B-\lambda E| = (\lambda-2)(\lambda-4)$，$\therefore$ $(B-2E)(B-4E) =$

$O$. よって $B-4E$ の列ベクトルは $B-2E$ 倍で $\mathbf{0}$ となり，$B$ の固有値 2 の固有ベクトルとなる：実際 $B-4E = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ の列ベクトル(の $-1$ 倍) $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ は $B\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}$ をみたす．固有値 4 の固有ベクトルも $B-2E$ の列ベクトルとして得られる．

**§4.4**　第 2 式より $X(t)$ は $\sin\Omega t$, $\cos\Omega t$ の 1 次結合だが，$X(0)=0$, $X'(0) = X_0'$ より $X(t) = \dfrac{X_0'}{\Omega}\sin\Omega t$. 一方対角化の精神で $x$, $X$ を「混ぜる」と

$$(x-kX)'' = -\omega^2(x-X)+k\Omega^2 X = -\omega^2\left\{x-\left(1+k\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)X\right\}$$

$k = 1+k\dfrac{\Omega^2}{\omega^2}$, $\therefore\ k = \left(1-\dfrac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^{-1}$ ならこれも同様に解け，$x(0)-kX(0)=0$ より $x-kX = \alpha\sin\omega t$. $X(t)$ を代入し $x(t) = \alpha\sin\omega t+\left(1-\dfrac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^{-1}\dfrac{X_0'}{\Omega}\sin\Omega t$.

$\omega\to\Omega$ のとき，ロピタルの定理により $\dfrac{\dfrac{\sin\omega t}{\omega}-\dfrac{\sin\Omega t}{\Omega}}{1-\Omega^2/\omega^2} = \dfrac{\omega\sin\omega t-\dfrac{\omega^2}{\Omega}\sin\Omega t}{\omega^2-\Omega^2}$

$$\longrightarrow \left.\frac{\sin\omega t+\omega t\cos\omega t-2\dfrac{\omega}{\Omega}\sin\Omega t}{2\omega}\right|_{\omega=\Omega} = \frac{t}{2}\cos\Omega t-\frac{\sin\Omega t}{2\Omega}.$$

**練習問題　4-1**　(i)　$|A-xE| = x^2-\mathrm{tr}(A)x+\det A = (x-\lambda)(x-\mu) = 0$ の解と係数の関係より．別解：$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & * \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ とすれば，$\det A = \det(P^{-1}AP) = \lambda\mu$. また $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \lambda+\mu$ (練習問題 3-2).

(ii)　(i)より $\det A = \lambda\mu \neq 0 \Leftrightarrow \lambda, \mu \neq 0$.

(iii)　ケーリー-ハミルトンの定理 $(A-\lambda)(A-\mu) = O$ で $\lambda=\mu=0$ なら $A^2 = O$. 逆に $A^2 = O$ のとき($A \neq O$ としてよい)，行列式をとり $(\lambda\mu)^2 = 0$ に注意すると $A^2-(A-\lambda)(A-\mu) = (\lambda+\mu)A = O$. $A\neq O$ なら $\lambda+\mu = 0$, $\therefore\ \lambda=\mu=0$.

**4-2**　(i)　$|A-\lambda| = (\lambda-3/2)(\lambda+1/2)$. $\lambda = \dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}$ の固有ベクトルを求め $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$. $P = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ により $P^{-1}AP = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(ii)　$$A^n = P\begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{3}{2}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} & \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{bmatrix}$$ と $\boldsymbol{v}_n = A^n\boldsymbol{v}_0$ より，

$$a_n = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)a_0+\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)a_1\right\}.$$

(iii)　$\left(\dfrac{3}{2}\right)^n\to\infty$ より $\dfrac{a_0}{4}+a_1 = 0$ が必要．$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\to 0$ より十分でもある．

**4-3**　$A-E = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.4 \\ 0.3 & -0.4 \end{bmatrix}$, この列ベクトルは $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ のスカラー倍で，固有値 0.3. また $A-0.3 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$ の列ベクトルは固有値 1. $\therefore\ P = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ によ

り $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

（i） $\boldsymbol{v}_0 = \begin{bmatrix} 300 \\ 700 \end{bmatrix}$ とし $\boldsymbol{v}_0 + A\boldsymbol{v}_0 + \cdots + A^{99}\boldsymbol{v}_0$ を求める. $1+A+\cdots+A^{99} = P\left(\sum_{n=0}^{99}\begin{bmatrix} (0.3)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{bmatrix}\right)P^{-1} = P\begin{bmatrix} \frac{1-(0.3)^{100}}{1-0.3} & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}P^{-1}$. ∴ $(1+A+\cdots+A^{99})\begin{bmatrix} 300 \\ 700 \end{bmatrix}$ $\fallingdotseq \frac{100}{7}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{190}{7} \\ 1000 \end{bmatrix} = \frac{100}{7}\begin{bmatrix} 4000+\frac{190}{7} \\ 3000-\frac{190}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56755 \\ 43245 \end{bmatrix}$（≒は小数部分を無視した), 客の総和は $X$ が 56755, $Y$ が 43245.

（ii） $n \to \infty$ のとき $A^n \to P\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ よって $x : y = 4 : 3$ となる.

**4-4** 条件は $[1,1]A = [1,1]$ つまり ${}^tA\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$（${}^tA$ が 1 を固有値にもつ）. よって $|{}^tA-1| = 0$, $|A-1| = 0$ であり $A$ も 1 を固有値にもつ.

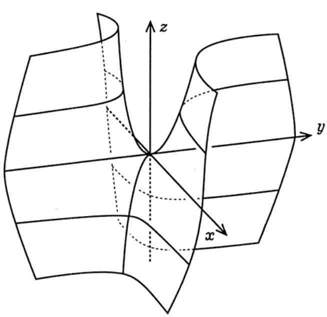
**4-5** （i） $A^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$. 帰納法によるが, $N = A-\lambda E$ とすると $N^2 = O$ なので, 2 項展開し $A^n = (\lambda E+N)^n = \lambda^n E + n\lambda^{n-1}N$（残りは $O$ !）とできる.

（ii） $|A-\lambda| = \lambda^2 - t^2$. $t \neq 0$ なら $X = \begin{bmatrix} 1 & t+1 \\ -1 & t-1 \end{bmatrix}$ で対角化される. $t = 0$ では $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ により $X^{-1}AX = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. いずれも $A^2 = t^2E$ より $A^{2n} = t^nE$, $A^{2n+1} = t^nA$（$t \neq 0$ なら $n$ が負整数でも成立）.

## 5章

**§5.1** (i)は正定値, (ii)は退化している, (iii)は非退化だが不定. 固有値を調べてもよいが, 次節のように $(x+y)^2+y^2 \geqq 0$, $(x-y)^2 \geqq 0$（退化してもこのように負にならないとき半正定値という）, $xy = \frac{1}{4}\{(x+y)^2-(x-y)^2\}$ としてもわかる.

**§5.2** （i） $z$ をきめるごとに切口は $z > 0$ ならば第 1, 3 象限の直角双曲線, $z = 0$ ならば $x$ 軸と $y$ 軸, $z < 0$ ならば第 2, 4 象限の直角双曲線であり, $z$ の絶対値が大になるとより軸から離れる. これより右図のようになる.




（ii） それぞれ $H = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 一般に $ax^2 + 2bxy + cy^2$ ならば $H = 2\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$（逆に

いえば，$f=\frac{1}{2}[x,y]\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ と表される)：定値性を調べるのは，この $H$ の固有値の正負を調べることにほかならない．

**§5.3** 本文§5.5の図5で矢印を逆向きにしたものになる．

**§5.4** (i) (21)を微分すると

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sinh t & \cosh t \\ \cosh t & \sinh t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}.$$

(ii) 4-5より $A^n=\begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$．∴ ($\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}n\lambda^{n-1}=t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\lambda^n$ に注意し) $e^{tA}=E+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$.

**§5.5** (i) $\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ のとき $\begin{bmatrix} \left(1+t\frac{\lambda}{n}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(1+t\frac{\mu}{n}\right)^n \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix}=e^{t\Lambda}$.

$A=\Lambda+N,\ \Lambda=\lambda E,\ N=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ のときは $\left(E+t\frac{A}{n}\right)^n=\left\{\left(E+t\frac{\lambda}{n}+\frac{N}{n}\right)\right\}^n=\left(E+t\frac{\lambda}{n}\right)^n+n\left(E+t\frac{\lambda}{n}\right)^{n-1}\frac{N}{n}=\left(1+t\frac{\lambda}{n}\right)^n E+\left(1+t\frac{\lambda}{n}\right)^{n-1}N\to e^{\Lambda t}(E+N)$．ここで $\left(1+t\frac{\lambda}{n}\right)^{n-1}=\left(1+t\frac{\lambda}{n}\right)^n\Big/\left(1+t\frac{\lambda}{n}\right)\to\frac{e^{t\lambda}}{1}$ を用いた．

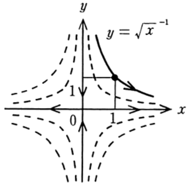
(ii) 一般のときは，$A=P^{-1}\Lambda P$ あるいは $A=P^{-1}(\lambda E+N)P$ としてわかる．

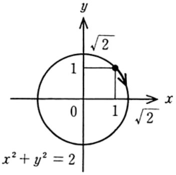
**練習問題 5-1** ${}^t\boldsymbol{x}(A+B)\boldsymbol{x}={}^t\boldsymbol{x}(A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{x})={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}+{}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x}\geqq 0$.

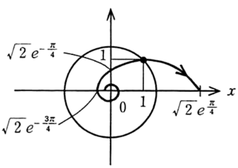
**5-2** (i) (この $f$ は定数項を除き3.6(ii)のもの．) 臨界点は $(f_x,f_y)=(10x-6y-8\sqrt{5},-6x+10y+8\sqrt{5})=(0,0)$ より $(x,y)=\left(\frac{\sqrt{5}}{2},-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ のみ．(3-6(ii)で用いた平行移動は原点をこの臨界点に移すもの．) この点で $\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$ は正定値ゆえ極小値(かつ最小値) $-20$ をとる．

(ii) 臨界点は $(f_x,f_y)=(2x+y-5,x-4y+2)=(0,0)$ より $(x,y)=(2,1)$．この点のみが極値の候補だが，この点で $\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ は正定値でないから $f$ は極値をもたない．(なお臨界点を原点に平行移動すると $f=(x-2)^2-2(y-1)^2+(x-2)(y-1)=\frac{1}{2}[x-2,y-1]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-2 \\ y-1 \end{bmatrix}$.)

**5-3** (i) $\boldsymbol{v}(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$，方程式は $xy^2=1$.



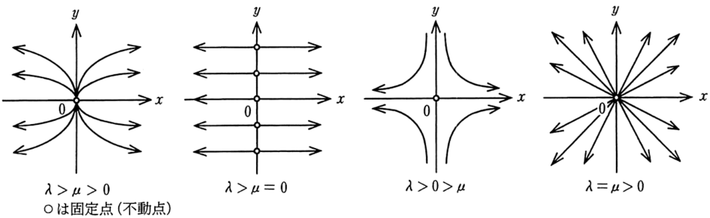



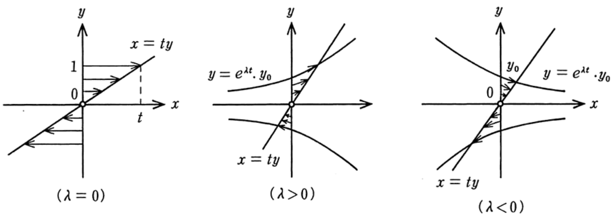
（ii） $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{-2J\cdot t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2t + \sin 2t \\ -\sin 2t + \cos 2t \end{bmatrix}$

（$J$ は例 2 のもの），軌跡の方程式は $x^2+y^2=2$.

（iii） $A = E-J$, $e^{tA} = e^t e^{-tJ}$, $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t\begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ -\sin t + \cos t \end{bmatrix}$. 軌跡の式は $x^2+y^2 = 2e^{2t}$, $x^2-y^2 = 2e^{2t}\sin 2t$ より $x^2-y^2 = (x^2+y^2)\sin\log\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)$.

**5-4** （i） 下図上段 （ii） 下図下段.



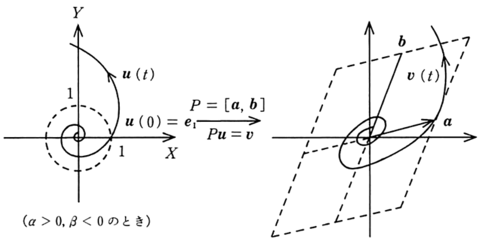




**5-5** （i） $|A-\lambda| = 0$ の解は互いに複素共役で $\lambda$, $\bar{\lambda}$ とおける．固有ベクトルも複素ベクトルだが $(A-\lambda)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow (A-\bar{\lambda})\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{0}$ より互いに複素共役としてよい．$\lambda = \alpha+i\beta$, $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は実ベクトル）とすれば

$$A[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = A\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}+\bar{\boldsymbol{v}}), \frac{1}{2i}(\boldsymbol{v}-\bar{\boldsymbol{v}})\right] = \left[\frac{1}{2}(\lambda\boldsymbol{v}+\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{v}}), \frac{1}{2i}(\lambda\boldsymbol{v}-\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{v}})\right]$$
$$= [\alpha\boldsymbol{a}-\beta\boldsymbol{b}, \beta\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

$P = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{v}, \bar{\boldsymbol{v}}]\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2i} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2i} \end{bmatrix}$ が可逆ならよいが $\boldsymbol{v} = k\bar{\boldsymbol{v}}$, $k \neq 0$ とすると $A$ 倍し $\lambda\boldsymbol{v} = k\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{v}}$, $\boldsymbol{v} = k\dfrac{\bar{\lambda}}{\lambda}\bar{\boldsymbol{v}}$ だが $\lambda \neq \bar{\lambda}$ より矛盾．$\therefore$ $|\boldsymbol{v}, \bar{\boldsymbol{v}}| \neq 0$（定理 3），$|P| \neq 0$.

（ii） $\boldsymbol{v}(t) = P\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}$ とおく．$\boldsymbol{u}' = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}\boldsymbol{u} = (\alpha E-\beta J)\boldsymbol{u}$, $e^{t(\alpha E-\beta J)} = e^{t\alpha E}e^{-t\beta J} = e^{t\alpha}R(-t)$ であり $\boldsymbol{u}(t) = e^{t\alpha}\begin{bmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta & \cos\beta t \end{bmatrix}\boldsymbol{u}(0)$. これは $X$, $Y$ 平面の対数らせんであり，$x, y$ 平面に移すと次ページの図のようになる．$\alpha$ の正負で外巻きか内巻きかが，$\beta$ の正負で右巻きか左巻きかがきまる．




## 6章

**§6.2** (i) $AB=\begin{bmatrix}5&2\\2&1\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&5\end{bmatrix}$ (ii) $A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}={}^tB$ ((i)の一部)は例である．3次では $A=E_{ij}$, $B=E_{jk}$, $i\neq k$ などが簡単な例．

(iii) $A=[a_{ij}]$ が $(m,n)$ 型とすると，$B=[b_{ji}]$ が $(n,m)$ 型のとき $AB$ が $(m,m)$ 型となる．そして $BA$ も $(n,n)$ 型で $\mathrm{tr}AB=\sum_{i=1}^{m}(AB)_{ii}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}b_{ji}a_{ij}=\mathrm{tr}BA$.

**§6.3** (ii) $f(k\boldsymbol{x}+k'\boldsymbol{x}')=f\left(\begin{bmatrix}kx_1+k'x_1'\\kx_2+k'x_2'\\\vdots\\kx_n+k'x_n'\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}kx_2+k'x_2'\\\vdots\\kx_n+k'x_n'\\kx_1+k'x_1'\end{bmatrix}=kf(\boldsymbol{x})+k'f(\boldsymbol{x}')$

であるから線型写像．行列で書くと：

$$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\\x_n\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\&0&1&\ddots&\vdots\\&&\ddots&\ddots&0\\&O&&0&1\\1&&&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\\x_n\end{bmatrix}$$

(このように各行で1か所1のほかは0, 各列でも同様の正方行列を**置換行列**という．置換行列は下のごとく成分の入替えを表し，入替え直しで逆写像ができ可逆である.)

**§6.4** (i) (15)はやさしい．(16)は $A_{ij}$ で $A$ の $(i,j)$ 成分を表せば $(AB)_{ik}(={}^t(AB)_{ki})=\sum A_{ij}B_{jk}=\sum({}^tA)_{ji}({}^tB)_{kj}=\sum({}^tB)_{kj}({}^tA)_{ji}=({}^tB{}^tA)_{ki}$ より．

(ii) 3次なら $\begin{bmatrix}\lambda&a&c\\0&\mu&b\\0&0&\nu\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda'&a'&c'\\0&\mu'&b'\\0&0&\nu'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\lambda'&a'\lambda+\mu a&\lambda c'+ab'+c\nu'\\0&\mu\mu'&\mu b'+b\nu'\\0&0&\nu\nu'\end{bmatrix}$. このように下三角成分の計算では行か列のどちらかから0が出る．$n$ 次でも同様．

**§6.6** (i) それぞれの辺を表すベクトルを考えると，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ としてよい．両辺を自分自身と内積をとれば $c^2=a^2+b^2-2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ であるが，これは $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=ab\cos\theta$ により余弦定理と同値である． (ii) $\pm k>0$ とすれば，$\boldsymbol{a}$ と垂直かつ原点から $\pm\boldsymbol{a}$ の方向に距離 $|k|/|\boldsymbol{a}|$ だけ離れた点を通る平面である．

**§6.7** (i) (26) $=Z_\phi Y_\theta Z_\varphi=\begin{bmatrix}cc'c''-ss''&-cc's''-sc''&cs'\\sc'c''+cs''&-sc's''+cc''&ss'\\-s'c''&s's''&c'\end{bmatrix}$. ただし $\cos\phi=$

$c$, $\cos\theta = c'$, $\cos\phi = c''$ などと書いた.

（ii） (i)と同様に書くと $Z_\phi Y_\theta = \begin{bmatrix} cc' & -s & cs' \\ sc' & c & ss' \\ -s' & 0 & c' \end{bmatrix}$, $Y_\theta Z_\phi = \begin{bmatrix} c'c & -c's & s' \\ s & c & 0 \\ -s'c & s's & c' \end{bmatrix}$.

対角成分は等しい. (1,3), (3,1) 成分は $c = 1(\therefore s = 0)$ または $s' = 0$ で, (1,2), (2,1) 成分は $c' = 1(\therefore\ s' = 0)$ または $s = 0$ で, (2,3), (3,2) 成分は $ss' = 0$ で一致. よって $Z_\phi Y_\theta = Y_\theta Z_\phi$ のためには $ss' = 0$(すなわち $\theta \in \boldsymbol{Z}\pi$ または $\phi \in \boldsymbol{Z}\pi$)が必要十分.

**練習問題 6-1** （i） 順に $\begin{bmatrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \\ & O & \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & & O & O \\ & \ddots & & \vdots \\ O & & 1 & O \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} O & \cdots & O \\ \vdots & 1 & \vdots \\ O & \cdots & O \end{bmatrix}$ (($i$, $j$) 成分のみ 1). これらをア） $[E_m, O]$, イ） $\begin{bmatrix} E_n \\ O \end{bmatrix}$($E_m, E_n$ は単位行列), ウ） $E_{ij}$(行列単位)とも書ける.

**6-2** （i） $\begin{bmatrix} \lambda^m & 0 & 0 \\ 0 & \mu^m & 0 \\ 0 & 0 & \nu^m \end{bmatrix}$ （ii） 単純にもできるが, $\lambda = 0$ のときを $N$ と書こう：$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. $N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N^3 = O$. このように何乗かが $O$ になるとき**ベキ零行列**という. $A = \lambda E + N$ なので, $EN = NE$ とあわせ $A^m = (\lambda E + N)^m = \lambda^m E + m\lambda^{m-1} N + \dfrac{m(m-1)}{2}\lambda^{m-2} N^2$ (2 項定理だが, $N^3$ 以上の項はない！)

$$\therefore \quad A^m = \begin{bmatrix} \lambda^m & m\lambda^{m-1} & \dfrac{m(m-1)}{2}\lambda^{m-2} \\ 0 & \lambda^m & m\lambda^{m-1} \\ 0 & 0 & \lambda^m \end{bmatrix}.$$

（iii） これもベキ零：$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & O \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1 \\ & O & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$, $\cdots$, $A^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & 0 & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & O & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$,

1 が並ぶ斜めの線が 1 つずつせり上がり, $A^n = O(\therefore\ N \geqq n$ なら $A^N = O)$.

**6-3** （i） 略, §1.2 の問(i)と同様. （ii） $Y = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & d \end{bmatrix}$ とすれば $XY = \begin{bmatrix} \lambda A & \lambda \boldsymbol{b} \\ \mu \boldsymbol{c} & \mu d \end{bmatrix}$, $YX = \begin{bmatrix} \lambda A & \mu \boldsymbol{b} \\ \lambda \boldsymbol{c} & \mu d \end{bmatrix}$. よって $\lambda \neq \mu$ なら $Y = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & d \end{bmatrix}$(**ブロック対角型**), $\lambda = \mu$ なら $Y$ は任意. 同様に区分けで効率良く計算できることがある.

**6-4** （i） $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の像を見て(または $x$ を変えず $yz$ 平面で $R(\alpha)$ と一致するから) $X_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & R(\alpha) \end{bmatrix}$ (区分け！). これを問 6.7 の結果と比較する. (3,3)成分を見て $\theta = \pm\alpha$. (1,3), (2,3)を見て $cs' = 0$, $ss' = -\sin\alpha = \mp s'$. また(3,1), (3,2)を見て $s'c'' = 0$, $s's'' = \sin\alpha(= \pm s')$. よって $\sin\alpha = s' \neq 0$ なら $c = 0$, $s = \mp 1$, $c'' = 0$, $s'' = \pm 1$($\pm$ は任意). つまり

$$X_\alpha = \begin{bmatrix} & \pm 1 & \\ \mp 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & & \pm\sin\alpha \\ & 1 & \\ \mp\sin\alpha & & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & \mp 1 & \\ \pm 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix} = Z_{\mp\frac{\pi}{2}} Y_{\pm\alpha} Z_{\pm\frac{\pi}{2}}.$$

これは $x, y$ 軸を(向きを考慮しつつ)取り換え $Y_\alpha$ を施せば $X_\alpha$ になることを示す．($\because$ $0 < \alpha < \pi$ なら $(\phi, \theta, \psi) = \left(\frac{3\pi}{2}, \alpha, \frac{\pi}{2}\right)$, $0 > \alpha > -\pi$ なら $(\phi, \theta, \psi) = \left(\frac{\pi}{2}, -\alpha, \frac{3\pi}{2}\right)$.)

(ii) オイラー角表示を使ってもよいが意味を考えるべき．$R = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ と書くと

$${}^tRR = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{a} \\ {}^t\boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{c} \end{bmatrix}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} & {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{c} \\ {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} & {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{c} \\ {}^t\boldsymbol{c}\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{c}\boldsymbol{b} & {}^t\boldsymbol{c}\boldsymbol{c} \end{bmatrix} = E \Leftrightarrow$$

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が長さ1で互いに直交(練習問題3-4(i))．これは $R$ が回転を表せばもちろん成立(オイラー角表示の根拠！)．

(iii) (ii)のように $f(\boldsymbol{x}) = R\boldsymbol{x}$, $R = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ とし，$R$ と問6.7の結果を比べる．$\boldsymbol{c} = {}^t[c_1, c_2, c_3]$ などと書くと $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{e}_3$ より $-1 \leqq c_3 < 1$，よって $c_3 = \cos\theta$ なる $0 < \theta \leqq \pi$ が唯一きまり，$c_1^2 + c_2^2 = 1 - c_3^2 = \sin^2\theta$ より $c_1 = \sin\theta\cos\phi$, $c_2 = \sin\theta\sin\phi$ と書ける：$\phi$ は $0 \leqq \phi < 2\pi$ で1つにきまる．$R{}^tR = E$ より $a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1$ なので同様に $a_3 = -\sin\theta\cos\psi$, $b_3 = \sin\theta\sin\psi$ と書け，$0 \leqq \psi < 2\pi$ は1つにきまる．

**6-5** (i) $f : X \to Y$ に逆写像 $g$, $g'$ があったとして，すべての $y \in Y$ に対し $g(y) = g'(y)$ を示せばよい $(g = g')$．しかし $g(f(x)) = x = g'(f(x))$ であり，$f$ が逆写像をもてば任意の $y$ は $y = f(x)$ と書けるからOK.

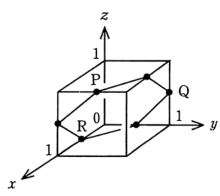
(ii) $f$ の逆写像を $g$ と書く．$f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w})$ において $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}'$, $f(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}'$ と書いて $g$ を施せば $g(f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})) = g(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{w}')$．左辺は $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = g(\boldsymbol{v}') + g(\boldsymbol{w}')$ である．また $f(k\boldsymbol{v}) = kf(\boldsymbol{v})$ に $g$ を施せば $g(f(k\boldsymbol{v})) = g(k\boldsymbol{v}')$．左辺は $k\boldsymbol{v} = kg(\boldsymbol{v}')$ だから $kg(\boldsymbol{v}') = g(k\boldsymbol{v}')$.

(iii) 前半は $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = E$，同様に $(B^{-1}A^{-1})(AB) = E$ より．後半は ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ と ${}^tE = E$ に注意すると $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ を転置し ${}^t(A^{-1}){}^tA = {}^tA{}^t(A^{-1}) = E$ を得る．$\therefore$ ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

## 7章

**§7.1** $x_1 = p_1$ かつ $\dfrac{x_2 - p_2}{a_2} = \dfrac{x_3 - p_3}{a_3}$ ($a_1 = 0$ のとき)，$x_1 = p_1$ かつ $x_2 = p_2$ ($a_1 = a_2 = 0$ のとき)．

**§7.2** (i) $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = {}^t\left[-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{PR}} = {}^t\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right]$ に直交する条件から，この平面の法線ベクトルを求めると(§7.5のベクトル積を用いると楽だが，直接求めればよい) $\boldsymbol{n} = {}^t[1, 1, -1]$ が得られる．これと直交するから $x+y-z = c$，点Rを通るという条件より $c = 1/2$．$U$ との共通部分は1辺 $\sqrt{2}/2$ の正6角形となる．(重心の位置ベクトルは ${}^t\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ であり，PQRは正三角形をなす．)




(ii) 法線ベクトルの間の鋭角が求める角，$\boldsymbol{e}_3$ が $z$

$=0$ の法線方向．$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{e}_3$ の成す角 $\theta$ を鋭角にとるとき，$\cos\theta=\left|\left(\boldsymbol{e}_3,\dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $(=0.5773\cdots,\ \therefore\ \ \theta\fallingdotseq 54.7°)$．

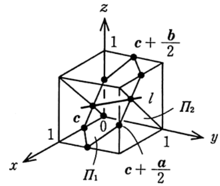
**§7.3** (i) $|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}|=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{vmatrix}=2.$ (ii) 2次のとき(2-3)と同様．

**§7.4** $|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}|=2>0$ より，$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ と同じ右手系．

**§7.5** (i) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}6\\-2\\3\end{bmatrix}$，面積は $\sqrt{36+4+9}=7.$

(ii) (31)を示す．両辺第1成分を比べればよく(∵ 本文)，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_2c_3-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_3c_2$ $=\begin{vmatrix}a_3&b_3\\a_1&b_1\end{vmatrix}c_3-\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}c_2=(a_3b_1c_3+a_2b_1c_2)-(a_1b_3c_3+a_1b_2c_2)=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})b_1-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})a_1$ より等しい($(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_j$ は $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の第 $j$ 成分)．(32)も同様．

**練習問題 7-1** (i) 法線ベクトルは ${}^t[1,-1,1]$. $\boldsymbol{c}$ を通るので $x-y+z=\dfrac{1}{2}$.




(ii) $\Pi_2$ の法線ベクトルは ${}^t[1,0,-1]$ で(i)の法線と直交し，$\Pi_1$ と $\Pi_2$ も直交する．

(iii) $l$ 上では $x-y+z=\dfrac{1}{2}$ と $x=z$ より $2x-y=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$ ${}^t[x,y,z]={}^t\left[x,2x-\dfrac{1}{2},x\right]$. $U\cap l$ は $\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq\dfrac{3}{4}$ の部分であり，その長さは $\sqrt{3}/2$.

**7-2** $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ より．

**7-3** 体積は $\dfrac{1}{6}|\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}},\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\0&1&2\end{vmatrix}=\dfrac{1}{6}(-2-1-1-2)=-1$ の絶対値として1．この行列式が負であるので $(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}},\overrightarrow{\mathrm{AD}})$ は左手系．

**7-4** $\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=X\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$，$X\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\dfrac{\pi}{6}&-\sin\dfrac{\pi}{6}\\0&\sin\dfrac{\pi}{6}&\cos\dfrac{\pi}{6}\end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}$ について解き $[0,1,0]\boldsymbol{x}=1$ に代入すれば

$$1=[0,1,0]X\left(-\frac{\pi}{6}\right)\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=[0,1,0]\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\frac{\pi}{6}&\sin\frac{\pi}{6}\\0&-\sin\frac{\pi}{6}&\cos\frac{\pi}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}.$$

これを計算しダッシュをとれば，$\Pi'$ の式は $\cos\dfrac{\pi}{6}y+\sin\dfrac{\pi}{6}z=1$．$\therefore$ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}y+\dfrac{1}{2}z=1$.

$\Pi''$ も $\boldsymbol{x}'=Y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)X\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}$ について解いて考えれば，

$$[0,1,0]X\left(-\frac{\pi}{6}\right)Y\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\begin{bmatrix}0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & 0 & \sin\frac{\pi}{3}\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\frac{\pi}{3} & 0 & \cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}$$

$$=\left[-\frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{4}\right]$$

より $-\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{4}z=1$.

**7-5** $\Pi''$ の方程式を $a''x+b''y+c''z+d''=0$ とする．$[a'',b'',c'',d'']=[k,k']\begin{bmatrix}a & b & c & d\\ a' & b' & c' & d'\end{bmatrix}$ ならよい．$\Pi \not\parallel \Pi'$ ゆえ $\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}b & c\\ b' & c'\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}$ のどれかは 0 でなく，$\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}\neq 0$ なら $[k,k']=[a'',b'']\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}^{-1}$ (他でも同様)．そこで

$$[c'',d'']\overset{(☆)}{=}[a'',b'']\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}c & d\\ c' & d'\end{bmatrix}$$

ならよい．さて $l$ は，条件 $\begin{bmatrix}a & b & c & d\\ a' & b' & c' & d'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ 1\end{bmatrix}=\mathbf{0}$ より

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}c & d\\ c' & d'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z\\ 1\end{bmatrix}\qquad (z\text{ は任意})$$

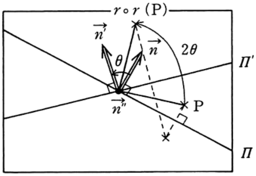
と(同じ仮定の下に)表される．これが $\Pi''$ 上にあるから

$$[c'',d'']\begin{bmatrix}z\\ 1\end{bmatrix}=-[a'',b'']\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=[a'',b'']\begin{bmatrix}a & b\\ a' & b'\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}c & d\\ c' & d'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z\\ 1\end{bmatrix}.$$

$z$ は任意であるから(☆)が成り立っている．

**7-6** (i) $|\boldsymbol{n}|=1$ として一般性は失われない．すると $r(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}-2(\alpha x+\beta y+\gamma z)\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2\alpha^2 & -2\alpha\beta & -2\alpha\gamma\\ -2\beta\alpha & 1-2\beta^2 & -2\alpha\gamma\\ -2\gamma\alpha & -2\gamma\beta & 1-2\gamma^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$. 行列式は $(1-2\alpha^2)(1-2\beta^2)(1-2\gamma^2)-16\alpha^2\beta^2\gamma^2-4\alpha^2\beta^2(1-2\gamma^2)-4\alpha^2\gamma^2(1-2\beta^2)-4\gamma^2\beta^2(1-2\alpha^2)=1-2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=-1$ ($\because |\boldsymbol{n}|=1$).

(ii) それぞれの単位法線を $\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}'$ とする．$\boldsymbol{n}''=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}'$ は $\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}'$ と直交するから，$r, r'$ で不変であり，これが $r\circ r'$ の軸を与える．$\boldsymbol{n}''$ の方から見ると下図のように平面の場合に帰着される．$\boldsymbol{n}$ を($\boldsymbol{n}''$ を軸として)$\theta$ 度回し $\boldsymbol{n}'$ が得られるとすれば，問§3.2 の結果より $r\circ r'$ の回転角は $2\theta$ である．




## 8章

§8.1 (i) 左辺 $=(1+\lambda E_{ij})(1+\mu E_{ji})=1+\lambda E_{ij}+\mu E_{ji}+\lambda\mu E_{ii}$, 右辺 $=1+\lambda E_{ij}+\mu E_{jk}+\lambda\mu E_{jj}$, 差は $\lambda\mu E_{ii}-\lambda\mu E_{jj}$.

§8.2 (i) 順に第4行を第3行から，第3行を第2行から，第2行を第1行から引いた．

（ii） $[A|E]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&-1\\0&1&0&0&1&-2\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&1\\0&1&0&0&1&-2\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]=[E|A^{-1}]$.

同様に $[B\,|E]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&-2&-1&1&0\\0&-1&0&-1&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&-2&-1&1&0\\0&0&-2&-2&1&1\end{array}\right]\to$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&-2&-1&1&0\\0&0&-2&-2&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&-2&-2&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{c|ccc}&-1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\E&1&0&-1\\&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right]=$

$[E|B^{-1}]$.

**§ 8.3** $\begin{bmatrix}x_1\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}-x_2\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}-x_3\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$, $x_2, x_3$ は任意.

**§ 8.4** (i) $\to\begin{bmatrix}1&-2\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$, (ii) $\to\begin{bmatrix}2&1&1&2\\0&5&3&2\\0&5/2&3/2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&1&2\\0&5&3&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ と行変形でき，階数は（i）1,（ii）2.

**§ 8.5** 拡大係数行列は次のように行変形でき，答は§ 9.1 本文のとおり：

$$\left[\begin{array}{c|c}&X\\A&Y\\&Z\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&X\\0&1&1&Y-X\\0&3&3&Z\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2X-Y\\0&1&1&-X+Y\\0&0&0&3X-3Y+Z\end{array}\right].$$

**練習問題 8-1** （i） $\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&2&1\\2&4&2\\1&2&3\end{bmatrix}$ （ii） $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4&3&2&1\\3&6&4&2\\2&4&6&3\\1&2&3&4\end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-2&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{bmatrix}$ (iv) 行変形で $\to\begin{bmatrix}x&1&1&1\\1&2&3&4\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to$

$\begin{bmatrix}x-1&0&0&0\\0&1&2&3\\1&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, 逆はなく階数 $=\begin{cases}3&(x\neq1),\\2&(x=1).\end{cases}$ （v） $\begin{bmatrix}\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&\frac{1}{2}&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{3}{5}&\frac{6}{5}&1&\frac{4}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{2}&1&\frac{5}{4}&1&\frac{1}{2}\\\frac{2}{5}&\frac{4}{5}&1&\frac{6}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{1}{2}&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\end{bmatrix}$

（vi） $\begin{bmatrix}1&-\lambda&\lambda^2&\cdots&(-\lambda)^{n-1}\\(-\lambda)^{n-1}&1&-\lambda&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\lambda^2\\\lambda^2&\cdots&(-\lambda)^{n-1}&1&-\lambda\\-\lambda&\lambda^2&\cdots&(-\lambda)^{n-1}&1\end{bmatrix}\times\frac{1}{1-(-\lambda)^n}$ （ただし $(-\lambda)^n=1$ なら階数は $n-1$）. はき出し法でもよいが，問題の行列を $A$, $C:=E-A$ とおくと $CE=EC$ と $C^n=(-\lambda)^nE$ より $(E-C)(E+C+C^2+\cdots+C^{n-1})=E^n-C^n=(1-(-\lambda)^n)E$. $\therefore A^{-1}=(E-C)^{-1}=(1-(-\lambda)^n)^{-1}(E+C+C^2+\cdots$

$+C^{n-1})$. $C, C^2, \cdots, C^{n-1}$ は簡単に求まる. これは(単位行列 $E$+ 簡単な行列)のとき便利なことがある. $E$ からのズレ $N$ がベキ零 $(N^n=O)$ なら $(E-N)^{-1}=E+N+N^2+\cdots+N^{n-1}$.

**8-2** (i) $a_{11}\cdots a_{nn}\neq 0$ のとき, 順に $a_{nn}\neq 0, \cdots, a_{11}\neq 0$ を要にして上にはき出せば $A^{-1}$ が得られ, 下から上にはき出すだけだから逆も上三角になる. 逆に $a_{11}\cdots a_{k-1,k-1}\neq 0$, $a_{kk}=0$ のとき $A'=[a_{ij}]_{i,j<k}$ は(i)より可逆, $A$ の第 $k$ 列 $\boldsymbol{a}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}'_k\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$(第 $k$ 成分以下が 0). $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}A'^{-1}\boldsymbol{a}'_k\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}-\boldsymbol{e}_k$ とすると $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}_k-\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ ゆえ $A^{-1}$ はない($A^{-1}$ があれば, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$). [後半は行列式を学ぶと「$|A|=0$ ゆえ逆はない」といえる(§12.1).] (ii)は 6-5(iii)よりしたがう.

**8-3** (i) $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$. 次のようにもできる:$(E+E_{12})(E-E_{21})(E+E_{12})=(E+E_{12}-E_{21}-E_{11})(1+E_{12})=(E_{22}+E_{12}-E_{21})(1+E_{12})=(E_{22}+E_{12}-E_{21})-E_{22}=E_{12}-E_{21}$.

(ii) (i)より $D_2(-1)E_{12}(1)E_{21}(-1)E_{12}(1)=C_{12}$. これは 1 を $j$, 2 を $k$ としても成り立ち, 第 $j$ 行と第 $k$ 行の入れ換え($C_{jk}$ 倍)が他の操作で得られることを示す.

**8-4** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}=A\boldsymbol{b}$, $A=\begin{bmatrix}0&-a_3&a_2\\a_3&0&-a_1\\-a_2&a_1&0\end{bmatrix}$ が求める行列 ($\boldsymbol{a}={}^t[a_1,a_2,a_3]$, $\boldsymbol{b}={}^t[b_1,b_2,b_3]$). 階数は $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ なら 0, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ なら 2 ($\because$ $A\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ より $A^{-1}$ はなく階数 $\leqq 2$, すべての行が互いに比例はせず階数 $\geqq 2$).

**8-5** 拡大係数行列を行変形し(i)→$\left[\begin{array}{cc|c}1&2&a\\0&0&b-2a\end{array}\right]$ $\therefore$ $b=2a$ のときのみ解は存在, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-2x_2\\x_2\end{bmatrix}$($x_2$ は任意).

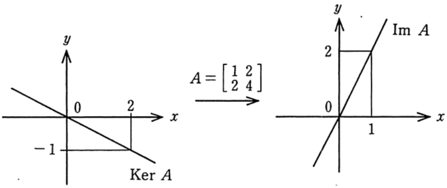
(ii)→$\left[\begin{array}{cccc|c}1&4&7&10&b\\0&1&2&3&a/3\\0&-3&-6&-9&c-2b\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-2&b-4a/3\\0&1&2&3&a/3\\0&0&0&0&c-2b+a\end{array}\right]$ $\therefore$ $a-2b+c=0$ のときのみ解は存在, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b-4a/3\\a/3\end{bmatrix}-x_3\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}-x_4\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$($x_3, x_4$ は任意).

(iii)→$\left[\begin{array}{ccc|c}t&O&-t&0\\&\ddots&\vdots&\vdots\\O&t&-t&0\\1\ \cdots&1&t+1&1\end{array}\right]\overset{t\neq 0}{\rightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&O&-1&0\\&\ddots&\vdots&\vdots\\O&1&-1&0\\0\ \cdots&0&t+n&1\end{array}\right]$ $\therefore$ (さらに第 $n$ 行で上にはき出し) $t\neq 0$ なら $t\neq -n$ のときのみ解をもち, $x_1=\cdots=x_n=\dfrac{1}{t+n}$. $t=0$ なら $\sum_{j=1}^{n}x_j=1$ と同値, $x_1=1-\sum_{j=2}^{n}x_j$($x_2, \cdots, x_n$ は任意).

## 9章

**§9.1** (i) ア) 和で閉じず部分ベクトル空間でない. イ) 部分ベクトル空間.

(ii) 像は $\boldsymbol{R}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\left\{t\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\middle|\, t \text{ は実数}\right\}$. 核は $\boldsymbol{R}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}=\left\{t\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\middle|\, t \text{ は実数}\right\}$:図は次のとおり




§9.2 (i) たとえば $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ が $W_イ$ の基底.(なお, $W_イ = \mathrm{Ker}[1,1,1]$.)

また $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ が $\mathrm{Im}\,A$ の, $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ が $\mathrm{Ker}\,A$ の基底.

(ii) 「$c_1A\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_nA\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ ならば $c_1 = \cdots = c_n = 0$」を言えばよい. $A^{-1}$ を掛け $c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$ を得るから, $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の独立性より $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

§9.3 (i) $B \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{c}', \boldsymbol{d}']$ と行変形でき, $\boldsymbol{c}' = 2\boldsymbol{a}'+3\boldsymbol{c}'$. 行変形に用いた可逆行列を $A$ とすれば $\boldsymbol{a}' = A\boldsymbol{a}$ などだから, これより $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{c}$. $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}', \boldsymbol{d}'$ は1次独立だから $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}$ が1次独立で, 他の列 $\boldsymbol{c}$ はこれらの1次結合. ∴ 元の第1, 2, 4列 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}\}$ が $\mathrm{Im}\,B$ の基底を与える.($\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$ または $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$ でもよい.) 一方上の変形より $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は ${}^t\boldsymbol{x} = -x_3[-2,-3,1,0]$($x_3$ は任意), すなわち $\mathrm{Ker}\,B = \boldsymbol{R}\,{}^t[-2,-3,1,0]$. ${}^t[-2,-3,1,0]$ が核の基底となる.

(ii) $\dim W > \dim V = n$ ならば $V$ の中に($W$ の基として)$n$ 個より多くの1次独立な元の組が存在し矛盾. 後半: $W$ の基底 $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n$ で表せない $\boldsymbol{v} \in V$ があれば, $c_1\boldsymbol{w}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{w}_n-\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ($c_j$ は任意). $\{\boldsymbol{w}_j\}$ の1次独立性とあわせ $\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n, \boldsymbol{v}\}$ の $n+1(> \dim V)$ 個が1次独立となり矛盾.

§9.4 $U = \mathrm{Ker}\,A$, $A = [1,2,3,4]$ は階数1. ∴ 次元定理より $\dim U = 4-1 = 3$.

§9.5 (i) $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4] \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (=: $[\boldsymbol{a}_1', \boldsymbol{a}_2', \boldsymbol{a}_3', \boldsymbol{a}_4']$) と行変形でき, 階数2. $\boldsymbol{a}_j'$ は $\boldsymbol{a}_j$ に左からある3次可逆行列 $P$ を掛けて得たので $\boldsymbol{a}_j'$ たちの1次独立性は $\boldsymbol{a}_j$ たちの1次独立性と一致(定理13).

$\boldsymbol{a}_1' = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}_2' = \boldsymbol{e}_2$ が独立で $\boldsymbol{a}_3', \boldsymbol{a}_4'$ は $\boldsymbol{a}_1', \boldsymbol{a}_2'$ で書けるから, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が独立で $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ で書ける. よって $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が像の基底.(別:前から見ていくと $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は(第1成分に注目すれば)独立, 階数(= 像の次元)個の1次独立なものが見つかったからこれらが像の基底.) 一方上の変形より $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\,A \iff A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{x} = {}^t[x_1, x_2, x_3, x_4] = x_3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_3, x_4$ は任意. ∴ $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ が核の基底.

(ii) は §9.6 の解(下)を参照.

**§9.6** 列変形すると

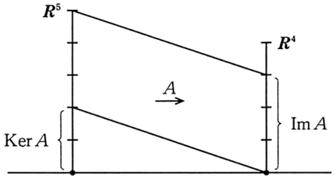
$$\left[\begin{array}{c|c} E_3 & A \\ \hline O & E_4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ E_3 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ & 2 & 3 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & -2 & -3 \\ O & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ E_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & 2 \\ & 0 & 1 & -2 & -3 \\ O & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\therefore$ ${}^t[0, 1, 2]$, ${}^t[1, 0, -1]$ で像の，${}^t[1, -2, 1, 0]$, ${}^t[2, -3, 0, 1]$ で核の基底. 右下を $Q$ とし

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & O \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & \\ \hline & O & & & Q & \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & O \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \\ \hline & O & & & Q & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} P & R \\ \hline O & Q \end{array}\right]$$

とさらに行変形すれば，$PAQ = R$ である.

**練習問題 9-1** (i) 行変形で $A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow [\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', 3\boldsymbol{v}_1' - \boldsymbol{v}_2', \boldsymbol{v}_3', 5\boldsymbol{v}_1' + 2\boldsymbol{v}_2' - \boldsymbol{v}_3']$ とでき，$\boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{v}_4' = \boldsymbol{e}_3$ かつ他の列はこれらの 1 次結合. $\therefore$ 元の第 1, 2, 4 列 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_4$ が $\mathrm{Im}\, B$ の基底を与える. この変形より $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は ${}^t\boldsymbol{x} = x_3[-3, 1, 1, 0, 0] + x_5[-5, -2, 0, -1, 1]$ であり，${}^t[-3, 1, 1, 0, 0]$, ${}^t[-5, -2, 0, -1, 1]$ が核の基底となる.




**9-2** 各行列 $A$ の第 $j$ 列を $\boldsymbol{a}_j$ と表せば (i) $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{e}_2$ より像は $\boldsymbol{R}^2$ 全体で 2 次元，基底は $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ にとれる. 核は $1 (= 3-2)$ 次元で，基底には ${}^t[1, -1, 1]$ がとれる.

(ii) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は(第 1, 3 成分に注目すれば) 1 次独立であり，像の基底になる. よって $\mathrm{Im}\, A$ は 2 次元. 核は $\boldsymbol{0}$ のみからなり(ゼロ空間)，0 次元. (ゼロ空間には 0 でない元がないので基底は空集合と考える.)

(iii) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は互いに平行なので，像は直線(1 次元)でその基底は $\boldsymbol{a}_1$ にとれる. 核は $3-1 = 2$ 次元，基底も容易で ${}^t[-2, 1, 0]$, ${}^t[-3, 0, 1]$ がとれる.

(iv) 行変形で, $A \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(= [\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \boldsymbol{a}'_3]$とおく). $\therefore$ $\boldsymbol{a}'_2 = \boldsymbol{a}'_1 - 2\boldsymbol{a}'_3$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_3$. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は 1 次独立で $A$ の像の基底になる. 像は 2 次元(上の変形で階数 = 2 でもある). 核は $3-2=1$ 次元で, 調べた従属関係 $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ から ${}^t[1, -1, -2]$ が基底とわかる.

(v) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$が像の基底：実際各列は $\boldsymbol{a}_1$ を $\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1 = {}^t[1,1,1,1]$ に次々加えてできる. これより $2\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}_{j-1} + \boldsymbol{a}_{j+1}$, $\therefore {}^t[1,-2,1,0]$, ${}^t[0,1,-2,1] \in \operatorname{Ker} A$. 核は 2 次元ゆえこれで基底.

**9-3** (i) 「$(c_1, \cdots, c_m) \neq \boldsymbol{0}$ で $c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0}$ となるものがない」ならば「$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ は 1 次独立」. つまり「$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0}$ なら $c_1 = \cdots = c_m = 0$」ならば「$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ は 1 次独立」.

(ii) $c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ ならば $c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + c_k f(\boldsymbol{v}_k) = 0$ であり, 仮定から $c_1, \cdots, c_k$ のどれかは 0 でない. 対偶は「$f(\boldsymbol{v}_1), \cdots, f(\boldsymbol{v}_k)$ が 1 次独立ならば, $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ は 1 次独立」.

**9-4** $\boldsymbol{v} = {}^t[1,0,3]$, $\boldsymbol{w} = {}^t[0,1,2]$ とする. ${}^t[x, y, z] = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w}$ ($a$, $b$ は任意)は $3x + 2y - z = 0$ をみたし, 解はこれで尽きる. $\therefore$ $W_1 = W_3$. また $W_2 = \operatorname{Im} A$, $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$ とすると $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{v} + 3\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$, $x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 = (x - y + z)\boldsymbol{v} + (x + 3y - z)\boldsymbol{w}$, $W_2 = \{x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 \mid x, y, z \text{ は任意}\} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{w} = W_1$.

**9-5** $A = [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n]$, $B = [\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n]$, $C = [\boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_n]$ とする. (i) $\operatorname{Im} A \ni x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = (x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{b}_n) + (x_1\boldsymbol{c}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{c}_n) \in \operatorname{Im} B + \operatorname{Im} C$.

(ii) (2, 1)型行列の $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ で例になる.

**9-6** (i) $\operatorname{Im} AB = A(\operatorname{Im} B) \subset \operatorname{Im} A$ より, 次元を比較すれば前者を得る. 一方 $\operatorname{Im} B$ の基底を $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_d$ とすれば, $A\boldsymbol{w}_1, \cdots, A\boldsymbol{w}_d$ が $\operatorname{Im} AB$ を張る. よってその次元は $d$ 以下であり, 後者が示された. ($\{A\boldsymbol{w}_j\}$ が 1 次独立と限らぬので不等号になる.)

(ii) $AB$ はたしかに 2 次のゼロ行列になる(略). これは $B = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]$ とすると $\boldsymbol{b}_j \in \operatorname{Ker} A$ ということ. $\therefore$ $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$. ここで $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ は独立だから $\operatorname{Im} B$ は 2 次元. 一方 $A$ の 2 つの行は独立だから $A$ は階数 2, $\therefore \operatorname{Ker} A$ は $4-2=2$ 次元(次元定理). $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$ で次元が等しいから両者は等しい. (iii) $B = [\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n]$ とすると $A\boldsymbol{b}_1 = \cdots = A\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{0}$ より $A(c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n) = \boldsymbol{0}$. $\therefore$ $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$. 次元が一致すれば両者は等しく, $\dim(\operatorname{Ker} A) = m - \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ が求める条件.

## 10章

**§10.1** たとえば $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ で $W$ の基底になり, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を補い(超平面 $W$ 上にない $\boldsymbol{x}$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \neq 0$ で良い) $\boldsymbol{R}^4$ の基底を得る.

§ **10. 2** $U_1 = \mathrm{Ker}[1, 2, 3, 4]$, $\dim U_1 = 4-1 = 3$. 一方 $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$ とすると $2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3$, $\therefore$ $U_2 = \mathrm{Im}A$ は 2 次元. $s\boldsymbol{a}_1 + t\boldsymbol{a}_3 \in \mathrm{Ker}[1, 2, 3, 4] \Leftrightarrow 20s + 30t = 0$ なので $U_1 \cap U_2 = \boldsymbol{R}\cdot(3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_3)$ (1 次元). よって $\dim(U_1 + U_2) = 3+2-1 = 4$.

§ **10. 3** ${}^t\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1]$, ${}^t\boldsymbol{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}[1, \omega, \omega^2]$, ${}^t\boldsymbol{v}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}[1, \bar{\omega}, \bar{\omega}^2]$ である. $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1+2+3) = 2\sqrt{3}$, $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1+\bar{\omega}\cdot 2+\bar{\omega}^2\cdot 3) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1+(-1-i\sqrt{3})+\dfrac{3}{2}(-1+i\sqrt{3})) = -\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$, $(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}) = -\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$. よって $\boldsymbol{v} = 2\sqrt{3}\,\boldsymbol{v}_1 - \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\boldsymbol{v}_3$. 同様に $\boldsymbol{w} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{v}_1 + \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\boldsymbol{v}_2 + \dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\boldsymbol{v}_3$.

§ **10. 4** 前からのとき：$\boldsymbol{u}_1 = \sqrt{14}^{-1}\boldsymbol{v}_1$. $\boldsymbol{v}_2 + a\boldsymbol{v}_1 \perp \boldsymbol{v}_1 \Longleftrightarrow 8+14a = 0$

$\therefore$ $\boldsymbol{u}_2 = \left|\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{4}{7}\boldsymbol{v}_1\right|^{-1}\left(\boldsymbol{v}_2 - \dfrac{4}{7}\boldsymbol{v}_1\right) = \sqrt{21}^{-1}\,{}^t[-4, -1, 2]$. $\boldsymbol{v}_3 + a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 \perp \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \Longleftrightarrow 3+14a+8b = 2+8a+5b = 0$, $\therefore$ $\boldsymbol{u}_3 = \left|\boldsymbol{v}_3 + \dfrac{1}{6}\boldsymbol{v}_1 - \dfrac{2}{3}\boldsymbol{v}_2\right|^{-1}\left(\boldsymbol{v}_3 + \dfrac{1}{6}\boldsymbol{v}_1 - \dfrac{2}{3}\boldsymbol{v}_2\right) = \sqrt{6}^{-1}\,{}^t[1, -2, 1]$. $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が求めるもの. 後ろからだと基本ベクトル $\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1$ を得る.

§ **10. 5** (i) 正規化した $V$ の基は $\boldsymbol{v} = \sqrt{3}^{-1}\,{}^t[1, -1, 1]$ だから, $\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, x_2, x_3]$ の $V$ への正射影は $\boldsymbol{x}_V = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{v} = \dfrac{x_1 - x_2 + x_3}{\sqrt{3}}\,{}^t[1, -1, 1]$. $V^\perp$ への正射影は $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_V$.

(ii) $\boldsymbol{w}_1 = {}^t[1, 1, 1, 1]$, $\boldsymbol{w}_2 = {}^t[1, -1, 1, -1]$ は互いに直交しており, $|\boldsymbol{w}_1|^2 = |\boldsymbol{w}_2|^2 = 4$ ゆえ $\dfrac{1}{2}$ (有理数！)倍すると正規直交系となる. $W$ への正射影は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_W &= \left(\boldsymbol{x}, \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_1\right)\frac{1}{2}\boldsymbol{w}_1 + \left(\boldsymbol{x}, \frac{1}{2}\boldsymbol{w}_2\right)\frac{1}{2}\boldsymbol{w}_2 \\ &= \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\,{}^t[1, 1, 1, 1] + \frac{x_1-x_2+x_3-x_4}{4}\,{}^t[1, -1, 1, -1] \\ &= \frac{1}{4}\,{}^t[x_1+x_3, x_2+x_4, x_1+x_3, x_2+x_4].\end{aligned}$$

$W^\perp$ への正射影は $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_W = \dfrac{1}{4}\,{}^t[3x_1 - x_3, 3x_2 - x_4, 3x_3 - x_1, 3x_4 - x_2]$.

**練習問題 10-1** (i) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ を $H$ の基底とする. $\boldsymbol{a}[\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k] = 0$ に解 $\boldsymbol{a}$ があれば, すべての $\boldsymbol{x} = \sum x_j \boldsymbol{v}_j \in W$ は $\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} = 0$ を満たし $W \subset \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{a}$. そして $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ なら($\mathrm{Im}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{R}$ は 1 次元で)次元定理より $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{a}$ は $n-1$ 次元, つまり $W = \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{a}$.

そこで解 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ の存在を示そう. $B = [\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k]$ とおけば条件は $\boldsymbol{a}B = \boldsymbol{0}$, 転置して考えれば ${}^tB\,{}^t\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$. ${}^tB$ は $(n-1, n)$ 型で横長だから(すなわち, ランクが $n-1$ 以下だから), 解 ${}^t\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ が必ずある. これを転置すればよい. [なおランクは転置で不変だった. ${}^tB$ でなく $B$ で考えると, そのランクすなわち $\mathrm{Im}\,B = W$ の次元は $n-1$ である. ゆえに次元定理より解 ${}^t\boldsymbol{a}$ も($\boldsymbol{a}$ も)1 次元だけである.]

(ii) $[a, b, c, d]\boldsymbol{v}_j = 0\ (j = 1, 2, 3)$ を解けばよい. 考えやすいよう転置すれば

$$\begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{v}_1 \\ {}^t\boldsymbol{v}_2 \\ {}^t\boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \boldsymbol{0},\ \text{ここで}\ \begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{v}_1 \\ {}^t\boldsymbol{v}_2 \\ {}^t\boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

と行変形し $[a, b, c, d] /\!/ \left[-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}, 1, 1\right]$. $\therefore$ $3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0$ が求める式.

**10-2** (i) $U + (V + W) = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W\} = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W\} = (U + V) + W$.

（ii）　$n=2$ とし，$U=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_1$，$V=\boldsymbol{R}\boldsymbol{e}_2$，$W=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\subset\boldsymbol{R}^2$ とすれば $(U+V)\cap W=\boldsymbol{R}^2\cap W=W$，$(U\cap W)+(V\cap W)=\{\boldsymbol{0}\}$.

**10-3**　（i）　$\boldsymbol{u}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_1$．$\boldsymbol{v}_2+a\boldsymbol{v}_1\perp\boldsymbol{v}_1\Leftrightarrow 3+2a=0$，$a=-3/2$．$\therefore\ \boldsymbol{v}_2-2/3\,\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1/2\\-1/2\end{bmatrix}$ を正規化し $\boldsymbol{u}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

（ii）　$\boldsymbol{u}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{w}_1$．$\boldsymbol{w}_2+a\boldsymbol{w}_1\perp\boldsymbol{w}_1\Leftrightarrow 1+2a=0$，$a=-\dfrac{1}{2}$．$\therefore\quad \boldsymbol{w}_2-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{w}_1=\begin{bmatrix}1\\-1/2\\1/2\end{bmatrix}$ を正規化し $\boldsymbol{u}_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$．次に $\boldsymbol{w}_3+a\boldsymbol{w}_1+b\boldsymbol{w}_2\perp\boldsymbol{w}_1$，$\boldsymbol{w}_2\Leftrightarrow 1+2a+b=1+a+2b=0$，$a=b=-1/3$．$\therefore\quad \boldsymbol{w}_3-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{w}_1-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{w}_2=\begin{bmatrix}2/3\\2/3\\-2/3\end{bmatrix}$ を正規化し $\boldsymbol{u}_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$.

（iii）　$|\boldsymbol{v}_1|^2=1+1+2=2^2$，$\boldsymbol{u}_1=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{v}_1$ が長さ1となる．$(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2+a\boldsymbol{v}_1)=0\Leftrightarrow a=-\dfrac{(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)}{(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1)}=\dfrac{(1+i)+0+(1-i)i}{4}=-\dfrac{1+i}{2}$，$\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{v}_2-\dfrac{1+i}{2}\boldsymbol{v}_1=\dfrac{1+i}{2}\,{}^t[1,-i,0]$ は（正規化しなくても）$|\boldsymbol{u}_2|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}=1$．次に $(\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_3+a\boldsymbol{v}_1+b\boldsymbol{v}_2)=0$ $(j=1,2)$ とすると $4a+2(1+i)b=-2(1-i)$，$2(1-i)a+3b=-1+2i$．これを解いて $a=i, b=-1$, $\boldsymbol{v}_3+i\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$ を正規化し $\boldsymbol{u}_3=\dfrac{1}{2}{}^t[-1,-i,1+i]$ を得る．$\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}$ が求める正規直交基底である．

**10-4**　（i）　$W^\perp=\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}_\perp$, ${}^t\boldsymbol{w}_\perp=\dfrac{1}{n}[1,\cdots,1]$，$|\boldsymbol{w}_\perp|=1$．$\therefore\ \boldsymbol{x}_\perp=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}_\perp)\boldsymbol{w}_\perp=\dfrac{x}{n}{}^t[1,\cdots,1]$ $(x=x_1+\cdots+x_n)$ が $W^\perp$ 成分．$W$ 成分は $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_\perp={}^t\left[x_1-\dfrac{x}{n},\cdots,x_n-\dfrac{x}{n}\right]$.

（ii）　${}^t\boldsymbol{u}_1=\sqrt{2}^{\,-1}[1,-1,0,\cdots,0]$，${}^t\boldsymbol{u}_2=\sqrt{6}^{\,-1}[1,1,-2,0,\cdots,0]$，$\cdots$，${}^t\boldsymbol{u}_{n-1}=\sqrt{n(n-1)}^{\,-1}[1,\cdots,1,1-n\}$ となる．

**10-5**　（i）　$\boldsymbol{x}\in(V+W)^\perp\Leftrightarrow\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{v}\in V$，$\boldsymbol{w}\in W\Leftrightarrow\boldsymbol{x}\perp V$ かつ $\boldsymbol{x}\perp W\Leftrightarrow\boldsymbol{x}\in V^\perp\cap W^\perp$．後半は $V\cap W=(V^\perp+W^\perp)^\perp$ ならよく，$V$ を $V^\perp$，$W$ を $W^\perp$ とすれば前半と同値．　（ii）　$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m$ を $V$ の正規直交基とし，これを $\boldsymbol{R}^n$ に延長したものを $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ とする．このとき $\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n$, $c_j=(\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{x})$ であるが，$\boldsymbol{x}_V=p_V(\boldsymbol{x})=c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_m\boldsymbol{v}_m=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1+\cdots+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_m)\boldsymbol{v}_m$ は $\boldsymbol{x}$ について線型である．また $p_V^2(\boldsymbol{x})=p_V(c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_m\boldsymbol{v}_m)=c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_m\boldsymbol{v}_m=p_V(\boldsymbol{x})$.

## 11章

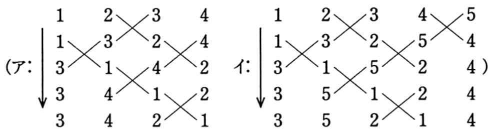
**§11.1**　（i）　（たとえば）第1列で展開し $0-\begin{vmatrix}1&2\\3&0\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=-(-6)+2(3-4)=4$．　（ii）　第2行で展開し $-2\begin{vmatrix}2&3\\2&1\end{vmatrix}+0-2\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix}=-2(-4-4)=16$.

（iii）　第1行で展開し $\begin{vmatrix}-1&1\\1&4\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}3&1\\5&4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3&-1\\5&1\end{vmatrix}=-5-3\cdot7+2\cdot8=-10$.

**§11.2**　ア）　(20)を用い，第2列の3倍，1倍をそれぞれ第1，3列に加え0を作っ

た． イ）(17) を用い，第1列から2，第3列から5を前に出した． ウ）(22)により，第1行から第3行を引いた．なお最後は第3列で展開し $10\begin{vmatrix}1&2\\0&-1\end{vmatrix}=-10$．（なおこれは11.1(iii)のもの；アのあと第2行で展開し $-\begin{vmatrix}10&5\\8&-5\end{vmatrix}=-10$ が速い．）

**§11.3** （i） ア） $-1$ イ） $+1$




$$\text{(ii)} \overset{ア}{=} \begin{vmatrix}0&a&0&0\\d&0&b&0\\0&0&0&c\\0&0&f&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0&0&0\\d&0&b&0\\0&e&0&c\\0&0&f&0\end{vmatrix}\overset{イ}{=}\begin{vmatrix}0&a&0&0\\d&0&0&0\\0&0&0&c\\0&0&f&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&a&0&0\\d&0&b&0\\0&0&0&c\\0&0&0&0\end{vmatrix}\overset{ウ}{=}adcf$$

$\times|\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_3|=+adcf$．アは第2列を和に分け(後ろの項は第2，4列が比例し0)，イは第3列を和に分けた(後ろの項は第1，3列が比例し0)．ウは各列のスカラー倍を前に出し，最後は $1\leftrightarrow 2$，$3\leftrightarrow 4$(符号は+)と入れかえた．

**§11.4** （i） ${}^t\begin{bmatrix}d&-c\\-b&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$ （ii） $c=\cos\theta$，$s=\sin\theta$ とする：

$${}^t\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}c&-s\\s&c\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&-s\\0&c\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&c\\0&s\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0&0\\s&c\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&0\\0&c\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0\\0&s\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&0\\c&-s\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0\\0&-s\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&0\\0&c\end{vmatrix}\end{bmatrix}={}^t\begin{bmatrix}1&0&0\\0&c&-s\\0&s&c\end{bmatrix}=A^{-1}.$$

**練習問題 11-1** （i）$=1\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&2&x-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&3\\2&x-1\end{vmatrix}=x-7$．$x=7$ ならば階数2．

$$\text{(ii)}=1\cdot\begin{vmatrix}4&-1&-1\\1&2&1\\3&-1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-1&-1\\5&1&0\\3&-1&0\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}5&1\\3&-1\end{vmatrix}=8.$$

$$\text{(iii)}=\begin{vmatrix}-1&1&1&0\\2&2&-1&1\\-9&-3&6&0\\-5&-7&3&0\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-1&1&1\\-9&-3&6\\-5&-7&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&1\\0&-12&-3\\0&-12&-2\end{vmatrix}=12.$$

$\text{(iv)}=\begin{vmatrix}4&-5&0&1\\3&0&0&2\\2&0&0&3\\1&0&-5&4\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}3&0&2\\2&0&3\\1&-5&4\end{vmatrix}=5\cdot5\begin{vmatrix}3&2\\2&3\end{vmatrix}=-125$．じつはこの行列は11-2 $a_4$ の余因子行列 $\hat{A}$．一般に $A\hat{A}=|A|E$ より $|\hat{A}|=|A|^{n-1}$．今は $|A|=5$ より $|\hat{A}|=5^3$．（v） 第2列以下を加えると第1列が0となり $|A|=0$，階数は3．（vi） 第2列以下から第1列を引き，次に第2行以下を第1行に加える：

$$\begin{vmatrix} x & 1-x & 1-x & \cdots & 1-x \\ 1 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} x+n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix}.$$

三角型になったから対角成分を掛ければ，答は $(x+n-1)(x-1)^{n-1}$. 上の変形で階数もわかり，$x=1-n$ なら $n-1$, $x=1$ なら 1, それ以外なら $n$.

**11-2** $a_2=3$, $a_3=4$, $a_4=5$. $n$ 次のときを $a_n$ とすると，第1列で展開し $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}$ がわかり，$a_2=3$, $a_3=4$ より $a_n=n+1$.

**11-3** (i) $\hat{A}={}^t\begin{bmatrix} 0 & cdf & 0 & -def \\ acf & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & adf \\ -abc & 0 & acd & 0 \end{bmatrix}$

$$=acdf\begin{bmatrix} 0 & 1/d & 0 & -b/df \\ 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/f \\ -e/ac & 0 & 1/c & 0 \end{bmatrix}.$$

(ii) 答は $\boldsymbol{x}={}^t\left[\dfrac{1}{d}-\dfrac{b}{df}, \dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{f}, -\dfrac{e}{ac}+\dfrac{1}{c}\right]$ だが，目で見て解いた方が速い.

**11-4** (i) 全部で24項あり，$A=[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]$, $\boldsymbol{a}={}^t[a_1, a_2, a_3, a_4]$ などとすれば

$$\begin{aligned} |A| = {} & a_1b_2c_3d_4-a_1b_2c_4d_3+a_1b_3c_2d_4-a_1b_3c_4d_2+a_1b_4c_2d_3-a_1b_4c_3d_2 \\ & +a_2b_1c_3d_4-a_2b_1c_4d_3+a_2b_3c_1d_4-a_2b_3c_4d_1+a_2b_4c_1d_3-a_2b_4c_3d_1 \\ & +a_3b_2c_1d_4-a_3b_2c_4d_1+a_3b_1c_2d_4-a_3b_1c_4d_2+a_3b_4c_2d_1-a_3b_4c_1d_2 \\ & +a_4b_2c_3d_1-a_4b_2c_1d_3+a_4b_3c_2d_1-a_4b_3c_1d_2+a_4b_1c_2d_3-a_4b_1c_3d_2. \end{aligned}$$

(ii) ひとつの置換 $\sigma$ に $\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$ を(たとえば)合成すると，$\operatorname{sgn}\sigma=\pm 1$ なら $\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau)=\mp 1$ ($\because \operatorname{sgn}\tau=-1$) となり，符号 + のものに − のものが1対1に対応するからそれぞれちょうど半分ずつとなる.

**11-5** $|X|$ を $A=[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m]$ の関数とみると，各列について線型かつ列のいれかえで交代的. $A=E$ のとき $|D|$ だから $|X|$ は $|A|$ の $|D|$ 倍である.

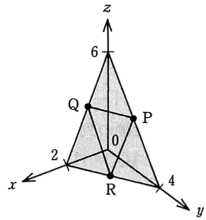
## 12章

**§12.1** (i) $C^{-1}TC=\operatorname{diag}(a+b+c, a+\omega b+\omega^2c, a+\omega^2b+\omega^4c)$.

(ii) $a^3+b^3+c^3-3abc=|T|=|C^{-1}TC|=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega^4c)$. (iii) 3次方程式は原点を移動し $x^3-3sx+t=0$ としてよい. $s=bc$, $t=b^3+c^3$ とできれば，(ii)より $x=a=-(b+c)$, $-(\omega b+\omega^2c)$, $-(\omega^2b-\omega^4c)$ が解. $b^3$, $c^3$ は2次方程式 $y^2-ty+s^3=0$ の解ゆえ $\dfrac{t}{2}\pm\sqrt{\dfrac{t^2}{4}-s^3}$. ∴ $b$ はこの3乗根，$c=\dfrac{s}{b}$.

**§12.2** (i) (ii)の P, Q, R の座標を代入すると2つの列が等しくなり行列式 =0. 行列式を展開すると $x$ の係数は $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=6$ などより $6x+3y+2z-12=0$. これは

P, Q, R を通る平面で，$x, y, z \geqq 0$ の部分は右図．




（ii）　領域は四面体 OPQR．

∴　体積は $\frac{1}{6}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}, \overrightarrow{\mathrm{OR}}| = 2$．

**§12.3**　$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$，一般に $|\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{n-1}| =$ $\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1}$．よって $n=3$ なら同じ向き，$n=4$ では違う向きなどと交互になる．

**§12.4**　（i）　$(\sum a_j^2)(\sum b_j^2) - \left(\sum_j a_j b_j\right)^2 = \sum_j a_j^2 b_j^2 + \sum_{j<k}(a_j^2 b_k^2 + a_k^2 b_j^2) - \left(\sum_j a_j^2 b_j^2 + 2\sum_{j<k} a_j b_j a_k b_k\right) = \sum_{j<k}(a_j^2 b_k^2 + a_k^2 b_j^2 - 2a_j b_j a_k b_k) = \sum_{j<k}(a_j b_k - a_k b_j)^2$．

（ii）　$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) (= -\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{a}) = 0$ は $\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_k \wedge \boldsymbol{e}_l$ の1次結合だが，これが $\neq 0$ なのは $i, j, k, l$ が相異るとき（$\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$）．$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_4 (\neq 0)$ の係数 $=0$ より目標の式が得られる．

**§12.5**　（i）　一般に $|A| = |{}^tA|$ であった．また $|kA| = k^n|A|$ である．よって ${}^tA = -A$ のとき $|A| = |{}^tA| = |-A| = (-1)^n|A|$ であり，$n$ が奇数なら $|A| = 0$．

（ii）　$a_{12} \neq 0$ として行変形を使えば（見やすいよう $a_{ij}$ を $aij$ と書こう）

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a12 & a13 & a14 \\ -a12 & 0 & a23 & a24 \\ 0 & -a23 & -a23\dfrac{a13}{a12} & a34 - a24\dfrac{a13}{a12} \\ 0 & -a24 & -a34 - a23a14/a12 & -a24a14/a12 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a12 & a13 & a14 \\ -a12 & 0 & a23 & a24 \\ 0 & 0 & 0 & a34 - a24\dfrac{a13}{a12} + a14\dfrac{a23}{a12} \\ 0 & 0 & -a34 - a23\dfrac{a14}{a12} + a13\dfrac{a24}{a12} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a12^2\left(a34 - a24\frac{a13}{a12} + a14\frac{a23}{a12}\right)^2 = (a12a34 - a24a13 + a14a23)^2.$$

（最後は第1, 2列で展開した）．$a_{12} = 0$ でもある成分 $a_{ij} \neq 0$ に注目すれば同様．

（iii）　一般にも $a_{12} \neq 0$ として（ii）のように第1, 2列の下方をともに0とすれば $|A|$ $= \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & * \\ -a_{12} & 0 & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A' \end{vmatrix}$，$A'$ も反対称．これを展開し $|A| = a_{12}^2|A'|$．帰納法から $|A'|$ は完全平方で $A'$ の成分の分母は $a_{12}$ のみだから，$a_{12}$ をくりこめば $|A|$ もある $N$ 次式 $\varphi(A)$ の2乗．なお $S_n$ を $n$ 文字の置換全体とすれば $\varphi(A)$ は次の通り（参考書・佐武『線形代数学』p 82 参照）：$\varphi(A) = \frac{1}{2^N N!}\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\,\sigma\, a_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots a_{\sigma(n-1)\sigma(n)}$．

**練習問題　12-1**　（i）　$\boldsymbol{v} = {}^t[x, y, 1] \neq \boldsymbol{0}$（$x, y$ は交点の座標）が $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ をみたすから．（ii）も同様．　（iii）　（i）では2直線，（ii）では2平面が平行なら，行列式

は 0(∵ 行変形)だがすべてが交わる点はなく反例になる.

**12-2** (i) $A=[\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n]$ とすると，右辺の 2 乗は $|{}^tAA|=|A|^2=\mathrm{vol}_n^2$.

(ii) $G={}^tAA$ であるから，$\boldsymbol{v}_j$ が従属関係 $A\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ をもてば $G\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, $\therefore |G|=0$.

逆に $|G|=0$ なら $G$ の階数 $r<m$. よって列変形のみで $G\to GQ$ を階段型にすると $GQ$ の最後の列は $\boldsymbol{0}$ となるが，このとき $AQ$ の最後の列も $\boldsymbol{0}$ となる．実際 $G={}^tAA$ だから，$AQ=A'=[\boldsymbol{a}_1',\cdots,\boldsymbol{a}_m']$ とすると ${}^tA\boldsymbol{a}_m'=O$. これは $(\boldsymbol{a}_j,\boldsymbol{a}_m')=0$ と書ける. $\boldsymbol{a}_m'\perp \mathrm{Im}\,A$, $\therefore \boldsymbol{a}_m'=\boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{a}_m'=AQ\boldsymbol{e}_m$ を書き直せば，$\boldsymbol{c}=Q\boldsymbol{e}_m\neq\boldsymbol{0}$ により従属関係 $A\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ を得る．なお，(iii)を用いて(ii)を示すこともできる.

(iii) 適当な直交行列 $T$ で $T\boldsymbol{v}_1,\cdots,T\boldsymbol{v}_m$ は「はじめの $m$ 成分以外 0」の部分空間 $\left\{\sum x_i\boldsymbol{e}_i \,\middle|\, x_{m+1}=\cdots=x_n=0\right\}$ に変換できる：$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m$ を正規直交化して $\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_m$ を作り，補って $\boldsymbol{R}^n$ の正規直交基 $\boldsymbol{w}_1,\cdots,\boldsymbol{w}_n$ を作れば，$\boldsymbol{w}_j\mapsto\boldsymbol{e}_j$ で定まる線型写像 $T$ が内積を変えず(すなわち直交行列で表され)，$T(\mathrm{Im}\,A)\subset\{\boldsymbol{x}\,|\,x_{m+1}=\cdots=x_n=0\}$. 直交行列は体積を変えないと考え，$P(T\boldsymbol{v}_1,\cdots,T\boldsymbol{v}_m)$ のはじめの $m$ 成分をみて定まる $m$ 次元体積 $\mathrm{vol}_mP(T\boldsymbol{v}_1,\cdots,T\boldsymbol{v}_m)$ を $\mathrm{vol}_mP(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m)$ と定める.

このとき $\boldsymbol{v}_j'=T\boldsymbol{v}_j$ とし，これらのグラム行列を $G'=[(\boldsymbol{v}_j',\boldsymbol{v}_k')]$ とすれば，$(\boldsymbol{v}_j',\boldsymbol{v}_k')=(\boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_k)$, $G'={}^t(TA)(TA)=G$. $TA$ の $r+1$ 行目から下の成分(すべて 0)を落してできる $m$ 次行列を $A'$ とすれば，(i)と同様に $|G'|=|{}^tA'A'|=|A'|^2=\mathrm{vol}_m^2$.

**12-3** (i) $[1,a,b,c]A=\boldsymbol{0}$ だから. (ii) 左辺の積を計算すればよい.

**12-4** (i) $(k,k)$ 成分が $\prod_{i=1}^{n}(x_i-y_k)$ である対角行列を右から掛ければ，$ij$ 成分が $\prod_{k\neq j}(x_i-y_k)$ となる．$x_i=x_i'$ なら第 $i,i'$ 行が，$y_j=y_j'$ なら第 $j,j'$ 行が一致するから 0.

(ii) 次数勘定より商は定数．どれかの項に注目し定数がわかる.

**12-5** $\boldsymbol{a}_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{e}_i$ と書くと $A=[a_{ij}]$. はじめの $m$ 行をとった $A'=[a_{ij}]_{1\leq i,j\leq m}$ の行列式が 0 でないとする．$c_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$ を $A\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}(\boldsymbol{c}={}^t[c_1,\cdots,c_m])$ と書き，$P=\begin{bmatrix}A'^{-1} & O\\ O & E_{n-m}\end{bmatrix}$ を左からかけると $PA\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}E_m\\ *\end{bmatrix}\boldsymbol{c}$. よって $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ であり $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ は 1 次独立．他の小行列式 $\neq 0$ のときも同様.

逆に $A$ のすべての $m$ 次小行列式が 0 とする．$A\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$ の存在を示すには，$A$ を基本変形して最後の列を $\boldsymbol{0}$ にすればよい．§9.5(13)の転置として，$A$ は列変形 $Q$ と行の置換 $P$ によって $PAQ=\begin{bmatrix}E_r & O\\ B & O\end{bmatrix}$ とできる．($r$ は $A$ の階数であり，$r=m$ ならばはじめの $A$ のある $m$ 行を選んで行列式が $\neq 0$ となり矛盾．よって最後の列は $\boldsymbol{0}$ である.) $A\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ は解 $\boldsymbol{c}=Q\boldsymbol{e}_m\neq\boldsymbol{0}$ をもつ.

**12-6** (i) ⇒：共通根 $x$ があれば $R\,{}^t[1,x,x^2,\cdots,x^{m+n-1}]=\boldsymbol{0}$ ゆえ $R^{-1}$ がない．⇐：$R$ の第 1 行(横ベクトル)，…，第$(m+n)$行を $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_m$ とすれば従属関係 $\sum_{j=1}^{n}c_j\boldsymbol{a}_j+\sum_{k=1}^{m}d_k\boldsymbol{b}_k=\boldsymbol{0}$ がある．${}^t[1,x,x^2,\cdots,x^{m+n-1}]$ を右からかけ

$$\sum_{j=1}^{n}c_jx^{j-1}f(x)+\sum_{k=1}^{m}d_{k-1}x^{k-1}g(x)=0.$$

$c(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx^{j-1}$, $d(x)=\sum_{k=1}^{m}d_k$ とおけば $c(x)f(x)=-d(x)g(x)$. 両辺は $f$ の $m$ 個の根を代入すると 0 となるべきだが，$d$ は高々 $m-1$ 次ゆえ少くとも 1 つの $f$ の根 $\alpha$

について $g(\alpha)=0$．[$|R|$ を $f, g$ の終結式(resultant)という．$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$，$\beta_1, \cdots, \beta_n$ を $f, g$ の根とすれば $|R| = a_m^n b_n^m \prod_{i,j}(\alpha_i - \beta_j)$ である：佐武『線形代数学』p. 72]

（ii）(i)で $f(x) = ax^2+bx+c$，$g(x) = f'(x) = 2ax+b$ として $|R| = a(b^2-4ac)$．$a \neq 0$ より $b^2-4ac = 0$．同様に 3 次のときも $27a^3d^2+4a^2c^4 = 0$．

## 13章

**§13.1**（i）$|A-tE| = \begin{vmatrix} -t & 3 & 5-t \\ 1 & 2-t & 6-2t \\ 3 & -3 & 1-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t & 3-t & 5-t \\ 1 & 3-t & 6-2t \\ 3 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = -(t-3)(t-1)(t-2)$．$(A-tE)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を $t = 1, 2, 3$ について解き $\boldsymbol{v}_1 = {}^t[-2, -2, 1]$，$\boldsymbol{v}_2 = {}^t[-6, -7, 3]$，$\boldsymbol{v}_2 = {}^t[1, 1, 0]$ をそれぞれ得る．$P = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3] = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 1 \\ -2 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ により $AP = [\boldsymbol{v}_1, 2\boldsymbol{v}_2, 3\boldsymbol{v}_3] = P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$．

（ii）$\mathrm{tr}\,\mathrm{A} = \mathrm{tr}\,BAB^{-1}$，$\det AB = \det A \det B$ であった．$P^{-1}AP = \mathrm{diag}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]$ のときの tr, det を計算し $\mathrm{tr}\,A = \mathrm{tr}\,P^{-1}AP = \mathrm{tr}(\mathrm{diag}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]) = \lambda_1+\cdots+\lambda_n$，$|A| = |P^{-1}AP| = \det(\mathrm{diag}[\lambda_1, \cdots, \lambda_n]) = \lambda_1\cdots\lambda_n$．

**§13.2** $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+1$，$A^3 = E$，$\chi_A(A) = -A^3+E = O$．また $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}[1, 1, 1]$，$Q_{\mp} = \begin{bmatrix} \omega_{\pm} & \omega_{\mp} & 1 \\ 1 & \omega_{\pm} & \omega_{\mp} \\ \omega_{\mp} & 1 & \omega_{\pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{\pm} \\ 1 \\ \omega_{\mp} \end{bmatrix}[1, \omega_{\pm}, \omega_{\mp}]$．

**§13.3** $P_1 = \dfrac{(A-2)(A-3)}{(1-2)(1-3)} = \begin{bmatrix} 6 & -6 & -2 \\ 6 & -6 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}[-3, 3, 1]$，$P_2 = \dfrac{(A-1)(A-3)}{(2-1)(2-3)} = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -7 & 7 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}[-1, 1, 0]$，$P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}[1, 0, 2]$．（たしかに $P_iP_j = O\,(i \neq j)$，$P_i^2 = P_i$，$P_1+P_2+P_3 = E$．）

**§13.4**（i）略．（ii）●$|B-\lambda| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 4-2\lambda & -3-\lambda & -1-2\lambda \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & -1-2\lambda \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4-2\lambda & -1-2\lambda \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$．

●$(B-1)\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & -4 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$ のスカラー倍のみ，

●$(B-2)\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 10 & -5 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ のスカラー倍のみ．$(B-2)\tilde{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{w}$ となる $\tilde{\boldsymbol{w}}$ として，$\tilde{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}(+k\boldsymbol{w})$ がとれる．∴ $X = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \tilde{\boldsymbol{w}}] =$

$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 10 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ により $BX = X\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $X^{-1}BX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

**練習問題 13-1** (i) $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ により，$P^{-1}AP = \mathrm{diag}[1, 2, 3]$.

(ii) $P = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ により，$P^{-1}AP = \mathrm{diag}[0, 2, 4]$.

(iii) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ により，$P^{-1}AP = \mathrm{diag}[1, -2, -3]$.

(iv) $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ により，$P^{-1}AP = \mathrm{diag}[1, 2, 3, 4]$.

(v) $\boldsymbol{v}_1 = {}^t[1, 1, \cdots, 1]$ とこれに直交し1次独立な $\boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ をとれば，$P = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ により $P^{-1}(E+xA)P = \mathrm{diag}[1+nx, 1, \cdots, 1]$.（$\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}_1$ が $A$ の固有値 $n$ の，その直交補空間が固有値0の固有空間.）

**13-2** $\boldsymbol{x}_{n+1} := \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ と同値. $A$ を対角化する. $|A-\lambda| = -(\lambda^3-4\lambda^2-\lambda+6) = -(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda+3)$. 各 $\lambda$ に対し，固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$. $P = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_{-2}, \boldsymbol{v}_{-3}]$ とすれば $A = P^{-1}DP, D = \mathrm{diag}(1, -2, -3)$. よって $\boldsymbol{x}_n = A^n\boldsymbol{x}_0 = P^{-1}D^nP\boldsymbol{x}_0$. これを計算して第1成分をみると $\boldsymbol{a}_n = \left(\frac{1}{2}a_0+\frac{5}{12}a_1+\frac{1}{12}a_2\right)+\left(a_0-\frac{2}{3}a_1-\frac{1}{3}a_2\right)(-2)^n+\left(-\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{4}a_1+\frac{1}{4}a_2\right)(-3)^n$. なお漸化式を解くだけならば，番号を進める写像 $(Ta)_n := a_{n+1}$ を考えると $0 = ((T^3+4T^2+T-6)a)_n = ((T-1)(T+2)(T+3)a)_n$ なので，$((T-\lambda)a)_n = 0 (\lambda = 1, -2, -3)$ の解が $a_n = \lambda^n$ であることから $a_n = \alpha\cdot 1^n+\beta(-2)^n+\gamma(-3)^n$ とも解ける（§4.1の注参照）.

**13-3** (i) ア) 1次式 $f(t) = at+b \neq 0$ で $f(A) = aA+bE = O$ となることはない. 2次式では，$(A-\lambda E)^2 = O$ すなわち $f_A(t) = (t-\lambda)^2$ に $A$ を代入すると $O$（ケーリー--ハミルトンの定理）. 他の2次式 $g(t) = t^2+at+b$ で $g(A) = O$ となれば差の1次式 $g(t)-f_A(t) = at+b$ でも $A$ を代入して $O$ となり矛盾するから，$g(t) = f_A(t)$. すなわちこれが求める最小多項式である. 一般にもこのように，最高次の係数を1とすれば最小多項式がただ1つにきまる（以下断わらない）. イ) アと同様に1次式では $g(A) = O$ とならず，2次式 $(t-\lambda)^2$ に代入すると $O$. よってこれが最小多項式. ウ) 2次行列に区分けして考える. 左上部分は2次式 $(t-\lambda)^2$ に代入し $O$ となるが $(A-\lambda)^2 = \begin{bmatrix} O & O \\ O & (\mu-\lambda)^2E \end{bmatrix} \neq O$ であり最小多項式は3次以上. $A-\mu = \begin{bmatrix} * & O \\ O & O \end{bmatrix}\left(* = \begin{bmatrix} \lambda-\mu & 1 \\ O & \lambda-\mu \end{bmatrix}\right)$ より $(A-\lambda)^2(A-\mu) = O$ だから，$(t-\lambda)^2(t-\mu)$ が求める式.

（ii） 対角化して考えると，固有値が相異なるので $(t-1)(t+2)(t+3)$ が最小多項式とわかる．固有空間への射影は(§ 13.3 のようにしても良いが) $D = \mathrm{diag}[1, -2, -3]$ については $D_1 = \mathrm{diag}[1, 0, 0]$，$D_2 = \mathrm{diag}[0, 1, 0]$，$D_3 = \mathrm{diag}[0, 0, 1]$ であり，$A = PDP^{-1}$ については $Q_j = PD_jP^{-1}$ が求める射影．$P^{-1} = \dfrac{1}{12}\begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 12 & -8 & -4 \\ -6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ より $Q_1 = \dfrac{1}{12}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}[6, 5, 1]$，$Q_2 = \dfrac{1}{12}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}[12, -8, -4]$，$Q_3 = \dfrac{1}{12}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}[-6, 3, 3, ]$．よって

$$
\begin{aligned}
e^{tA} &= e^tQ_1 + e^{-2t}Q_2 + e^{-3t}Q_3 (= Pe^{tD}P^{-1}) \\
&= \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 6e^t+12e^{-2t}-6e^{-3t} & 5e^t-8e^{-2t}-3e^{-3t} & e^t-4e^{-2t}+3e^{-3t} \\ 6e^t-24e^{-2t}+18e^{-3t} & 5e^t+16e^{-2t}-9e^{-3t} & e^t+8e^{-2t}-9e^{-3t} \\ 6e^t+48e^{-2t}-54e^{-3t} & 5e^t-32e^{-2t}+27e^{-3t} & e^t-16e^{-2t}+27e^{-3t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

**13-4** （i） $|R-\lambda|$ は実係数 3 次方程式であり必ず根をもつ．これを $\lambda$ とすれば，係数が実の 1 次方程式 $(R-\lambda)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ は実ベクトル $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ を解とする．${}^tRR = 1$ は $(R\boldsymbol{v}, R\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ を意味するが，$\boldsymbol{v}$ が固有ベクトルなら $(R\boldsymbol{v}, R\boldsymbol{v}) = \lambda^2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$．よって $\lambda^2 = 1$．(なお複素固有ベクトルについては，$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ であっても ${}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} \neq 0$ と限らないことに注意．) （ii） 残りの根は $\mu, \bar{\mu}$ とおける．固有値の積は行列式ゆえ $\pm 1|\mu|^2 = 1$ を得る．$|\mu|^2 > 0$ だから複号は $+$．($|R| = -1$ なら $-1$ が固有値となる．)

**13-5** （i） 条件より $[1, \cdots, 1]A = [1, \cdots, 1]$，これは ${}^tA$ が 1 を固有値とすることを意味する．$|A-tE| = |{}^tA-tE|$ であるから $A$ も 1 を固有値とする．

（ii） 1 以外の固有値(特性根)が絶対値 1 未満なら，$(P^{-1}AP)^n = \mathrm{diag}[1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]^n \to \mathrm{diag}[1, 0, \cdots, 0]$ と対角化して考え主張が示される．$\boldsymbol{x} = {}^t[x_1, \cdots, x_n]$ に対し $[\boldsymbol{x}] = x_1 + \cdots + x_n$ とおくと条件より $[A\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{x}]$．$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ とすると $[\boldsymbol{x}] = [A\boldsymbol{x}] = \lambda[\boldsymbol{x}]$ だから，固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\lambda \neq 1$ なら超平面 $[\boldsymbol{x}] = 0$ に含まれる．一方 $a_{ij} > 0$ より，$A$ 倍は $\boldsymbol{R}^n$ の「第 1 象限」$x_1 \geqq 0, \cdots, x_n \geqq 0$ をその内部にうつす($A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$)．$n = 3$ で考えれば，$[\boldsymbol{x}] = x_1 + x_2 + x_3 = 1$ かつ $x_j \geqq 0$ の領域は周を含む三角形であるが，$A$ 倍でこの領域が真に小さい領域に移される．1 以外の固有値 $\lambda$ で絶対値が 1 以上のものがあれば($\lambda$ が実数でない場合も含め)このようなことは起きないであろう．

証明には $A$ のかわりに ${}^tA$ を考えると(多少)便利である：${}^tA$ の固有値 1 の固有ベクトルは ${}^t[1, \cdots, 1] = 1$ で与えられ，「第 1 象限内部」に属する：$\boldsymbol{1} > \boldsymbol{0}$．$\boldsymbol{x}$を実固有値 $\lambda$ に対応する実固有ベクトルとしよう．一般に $(\boldsymbol{v})_k$ でベクトル $\boldsymbol{v}$ の第 $k$ 成分を表せば，$|r|$ が十分小さいとき $(\boldsymbol{1}+r\boldsymbol{x})_l > 0$ $(l = 1, \cdots, n)$．すなわち $\boldsymbol{1}+r\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$．$\boldsymbol{x}$ の成分の絶対値の最大が $|x_k|$ ならば，$r$ を適当にとり $(\boldsymbol{1}+r\boldsymbol{x})_k = 0$ かつ $(\boldsymbol{1}+r\boldsymbol{x})_l \geqq 0 (l \neq k)$ とできる．($r = -x_k^{-1}$ であり，「$\boldsymbol{1}$ の終点から $\boldsymbol{x}$ の方向に第 1 象限の境界まで線を引いて」$\boldsymbol{1}+r\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{1}+r\boldsymbol{x} \not> \boldsymbol{0}$ とした．) ${}^tA^m$ 倍すると ${}^tA^m(\boldsymbol{1}+r\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{1}+r{}^tA^n\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ $(m = 1, 2, \cdots)$．第 $k$ 成分に注目すると，$rx_k = -1$ より $1-\lambda^m > 0$，$\therefore \quad 1 > |\lambda|$．

複素固有値についても(繁雑になるが)同様である．$\boldsymbol{v}$ を $\lambda \neq \bar{\lambda}$ に対応する ${}^tA$ の複素固有ベクトルとする：${}^tA\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$．$\lambda = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}$ と実部，虚部にわければ ${}^tA\boldsymbol{x} = \rho(\cos\theta\boldsymbol{x} + \sin\theta\boldsymbol{y})$，${}^tA\boldsymbol{y} = \rho(-\sin\theta\boldsymbol{x} + \cos\theta\boldsymbol{y})$．上と同様，実数 $r$，

$s$ を適当にとり $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{1}+r\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{w}\geqq\boldsymbol{0}$, $A\boldsymbol{w}>\boldsymbol{0}$ としたい．そこで $|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{1}|=|r\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{y}|$ が($\boldsymbol{w}\in$ 第1象限で)最大になる $(r,s)=t(\cos\phi,\sin\phi)$ を選ぼう．最大値 $M$ は第1象限の境界で実現され，$\boldsymbol{w}\geqq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{w}\not>\boldsymbol{0}$. ${}^tA^m w>\boldsymbol{0}$ だから $|{}^tA^m\boldsymbol{w}-\boldsymbol{1}|<M=\max_{\boldsymbol{w}\geqq 0}|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{1}|$. $\therefore$ $\rho^{2m}|\cos(m\theta+\phi)\boldsymbol{x}+\sin(m\theta+\phi)\boldsymbol{y}|^2<|\cos\phi\boldsymbol{x}+\sin\phi\boldsymbol{y}|^2$, すなわち

$$\rho^{2m}\{|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2+\sin 2(m\theta+\phi)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}<\{|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2+\sin 2\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\} \qquad (*)$$

$(*)$ の右辺は $\boldsymbol{v}$ を何倍かにとりかえ1としてよい．そのとき

$$|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2+\sin 2(m\theta+\phi)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=1+(\sin 2(m\theta+\phi)-\sin 2\phi)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

自然数 $m$ を適当にとれば $(\sin 2(m\theta+\phi)-\sin 2\phi)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqq 0$ となるから，$(*)$より $\rho^{2m}<\boldsymbol{1}$ を得る．$\therefore$ $|\rho|<1$.

以上で ${}^tA$ の(したがって $A$ の)1以外の特性根は絶対値がすべて1未満であることが示せたから，$\lim_{m\to\infty}A^m$ が存在する．(なお ${}^tA$ を考えたのは，固有値1の固有ベクトル ${}^t[1,\cdots,1]$ が第1象限に属することが明らかであるからで，これを別途示せば ${}^tA$ を用いる必要はない．) $m\to\infty$ で極限があれば $A(A^\infty)=A^\infty$ と考えられるから，$A^\infty$ の列ベクトルは固有値1の固有ベクトルとなるであろう(これは $m\to\infty$ における定常的状態を表し，**ペロン-フロベニウス・ベクトル**とよばれる)．それを定式化したのがこの問題である．結果は $a_{ij}\geqq 0$ ならば確率行列でなくても適当な条件下で成立ち，**ペロン-フロベニウスの定理**とよばれる．

**13-6** (i) ${}^t[0,\cdots,0,x^n+x^{n-2}+\cdots+x^{-n}]$. (ii) $x^n+x^{n-2}+\cdots+x^{-n}=0$ ならば $\boldsymbol{v}$ が固有値 $\lambda=x+x^{-1}$ の固有ベクトルとなる．$x^2\neq 1$ は1の $n+1$ 乗根で，固有値は $\lambda=x+x^{-1}$ より $\left\{\cos\dfrac{k}{n+1}\pi \,\middle|\, k=1,\cdots,n\right\}$. (1つの $x^2$ に2解 $x,-x$ が対応するが，$x=e^{ik\pi/(n+1)}$ なら $-x-x^{-1}=-2\cos\dfrac{k\pi}{n+1}=2\cos\dfrac{n+1-k}{n+1}\pi$ に注意.)

## 14章

§**14.1** (i) $0\boldsymbol{v}=(0+0)\boldsymbol{v}+0\boldsymbol{v}$ から左辺を移項し，$\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{v}$. また $k\boldsymbol{0}=k(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0})=k\boldsymbol{0}+k\boldsymbol{0}$ から同様に $k\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

(ii) $(-1)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}=0$ ならよいが，$\boldsymbol{v}=1\boldsymbol{v}$ より左辺は $((-1)+1)\boldsymbol{v}=0\boldsymbol{v}\overset{(i)}{=}\boldsymbol{0}$.

(iii) $k\neq 0$ のとき $\boldsymbol{v}=0$ を示せばよいが，体の元は $k\neq 0$ ならば逆元 $k^{-1}$ があるから，$0=k^{-1}(k\boldsymbol{v})=(k^{-1}k)\boldsymbol{v}=1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$.

§**14.2** (i) $A=[a_{ij}]$ のとき $\mathrm{tr}\,A=a_{11}+\cdots+a_{nn}$ であった．これより $\mathrm{tr}\,A=0$, $\mathrm{tr}\,B=0$ ならば $\mathrm{tr}\,(kA+lB)=k\,\mathrm{tr}\,A+l\,\mathrm{tr}B=0$. よって $V$ は $M_{n,n}(\boldsymbol{K})$ の部分(ベクトル)空間である．$E_{ij}(i\neq j)$, $E_{ii}-E_{i+1,i+1}$ が基底となり，次元は $n^2-1$.

(ii) ア) $U$ の元は $k_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{u}_n$ $(k_i\in\boldsymbol{K})$ と書ける．$f$ は全射だから，$V$ の元は $f(k_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{u}_n)=k_1f(\boldsymbol{u}_1)+\cdots+k_nf(\boldsymbol{u}_n)$ と書ける．$k_1f(\boldsymbol{u}_1)+\cdots+k_nf(\boldsymbol{u}_n)=\boldsymbol{0}$ とすれば，$f^{-1}$ で「引き戻し」$k_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{0}$ となるから $k_1=\cdots=k_n=0$. よって $f(\boldsymbol{u}_j)$ たちは1次独立で，$V$ の基底となる．

イ) 合成 $g\circ f: U\xrightarrow{\cong}V\xrightarrow{\cong}W$ も線型かつ1対1ゆえ，$U\cong W$ である．

§**14.3**　(i)　$\phi=\begin{bmatrix}0&1&&&O\\&0&2&&\\&&0&3&\\O&&&\ddots&\ddots\end{bmatrix}$, $\psi=\begin{bmatrix}0&&&&O\\1&0&&&\\&1/2&0&&\\&&1/3&0&\\O&&&\ddots&\ddots\end{bmatrix}$.

(ii)　$\psi\circ\phi=\begin{bmatrix}0&&&O\\&1&&\\&&1&\\O&&&\ddots\end{bmatrix}$, $\phi\circ\psi=\begin{bmatrix}1&&&O\\&1&&\\&&1&\\O&&&\ddots\end{bmatrix}$. $\phi$ は微分，$\psi$ は積分であるが，無限サイズでは $AB=E$ でも $BA=E$ と限らないという一例.

§**14.4**　$\partial^3-\partial^2-4\partial+4=(\partial-1)(\partial-2)(\partial+2)$ より(または $u=e^{\lambda t}$ が解とすると $Le^{\lambda t}=(\lambda^3-\lambda^2-4\lambda+4)e^{\lambda t}=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2)e^{\lambda t}$ より)解 $u=e^t, e^{2t}, e^{-2t}$ を得る. $u_i=a_ie^t+b_ie^{2t}+c_ie^{-2t}$ が $u_i^{(j)}=\delta_{ij}$ を満たす $\Longleftrightarrow E=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&-2\\1&4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0&a_1&a_3\\b_0&b_1&b_3\\c_0&c_1&c_3\end{bmatrix}$,

$$\therefore\quad [u_0, u_1, u_1]=[e^t, e^{2t}, e^{-2t}]\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&-2\\1&4&4\end{bmatrix}^{-1}$$
$$=\left[\frac{4}{3}e^t-\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{6}e^{-2t},\ \frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{4}e^{-2t},\ -\frac{1}{3}e^t+\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{1}{12}e^{-2t}\right].$$

**練習問題　14-1**　(i)　$\iota$ が和と複素数倍を保てばよい. $w, w'\in \boldsymbol{H}$ に対し $\iota(w+w')=\iota(w)+\iota(w')$ は明らか. $z=x+iy\in \boldsymbol{C}$, $w=a+bi+(c+di)j\in \boldsymbol{H}$ に対し $zw=z(a+bi)+z(c+di)j=((xa-yb)+(xb+ya)i)+((xc-yd)+(xd+yc)i)j$.

$$\therefore\quad \iota(z_w)=\begin{bmatrix}(xa-yb)+(xb+ya)i\\(xc-yd)+(xd+yc)i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z(a+bi)\\z(c+di)\end{bmatrix}=z\begin{bmatrix}a+bi\\c+di\end{bmatrix}=z\iota(w).$$

(ii)　$z, z'\in \boldsymbol{C}$, $\omega, w, w'\in \boldsymbol{H}$ のとき $f_\omega(zw+z'w')=(zw+z'w')\omega=zw\omega+z'w'\omega=zf\omega(w)+z'f\omega(w')$.

(iii)　$\omega=\alpha+\beta i+(\gamma+\delta i)j$ とすると $w\omega=(a+bi+(c+di)j)(\alpha+\beta i+(\gamma+\delta i)j)=(a+bi)(\alpha+\beta i)+(a+bi)(\gamma+\delta i)j+(c+di)j(\alpha+\beta i)+(c+di)j(\gamma+\delta i)j=(a+bi)(\alpha+\beta i)+(a+bi)(\gamma+\delta i)j+(c+di)(\alpha-\beta i)j+(c+di)(\gamma-\delta i)j^2$.

$$\therefore\quad f_\omega(w)=\begin{bmatrix}(a+bi)(\alpha+\beta i)-(c+di)(\gamma-\delta i)\\(a+bi)(\gamma+\delta i)+(c+di)(\alpha-\beta i)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha+\beta i&-(\gamma-\delta i)\\\gamma+\delta i&\alpha-\beta i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a+bi\\c+di\end{bmatrix}$$

(つまり $f_{z+z'j}$ は $\begin{bmatrix}z&-\overline{z'}\\z'&\overline{z}\end{bmatrix}$ で表される).

**14-2**　実数 $a$ に対し $f(a\boldsymbol{x})=af(\boldsymbol{x})$ ならばよい. 条件より $a$ が自然数のときは成り立つ. $f(\mathbf{0})=f(\mathbf{0}+\mathbf{0})=f(\mathbf{0})+f(\mathbf{0})$ より $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$. $\therefore$ $\mathbf{0}=f(\mathbf{0})=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+f(-\boldsymbol{x})$ となり $f(-\boldsymbol{x})=-f(\boldsymbol{x})$. よって負の整数 $n$ についても $f(n\boldsymbol{x})=f(-|n|\boldsymbol{x})=-f(|n|\boldsymbol{x})=-|n|f(\boldsymbol{x})=nf(\boldsymbol{x})$. 有理数 $a=m/n$ ($m$ は整数，$n$ は自然数)のときも，$f(m\boldsymbol{x})=f\left(n\dfrac{m}{n}\boldsymbol{x}\right)=nf\left(\dfrac{m}{n}\boldsymbol{x}\right)$ より $f\left(\dfrac{m}{n}\boldsymbol{x}\right)=\dfrac{m}{n}f(\boldsymbol{x})$ となる. 一般の実数 $a$ については，$a$ に収束する有理数の列 $a_1, a_2, \cdots$ をとれば，$f$ の連続性より $f(a\boldsymbol{v})=\lim f(a_n\boldsymbol{v})$. $f(a_n\boldsymbol{v})=a_nf(\boldsymbol{v})$ だから $f(a\boldsymbol{v})=af(\boldsymbol{v})$.

**14-3** $\boldsymbol{K}^\infty$ は成分ごとの和とスカラー倍でベクトル空間となる．$V$ がこの演算で閉じていれば良いが $x_{j+n}=a_1x_j+\cdots+a_nx_{j+n-1}$，$x'_{j+n}=a_1x'_j+\cdots+a_nx'_{j+n-1}$ ならば $kx_{j+n}+lx'_{j+n}=a_1(kx_j+lx'_j)+\cdots+a_n(kx_{j+n-1}+lx_{j+n-1})$ より，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}'\in V\Rightarrow k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{x}'\in V$．よって $V$ は部分ベクトル空間．$\boldsymbol{x}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(n)}$ が基底になることを示そう($x_1,\cdots,x_n$ がきまれば一般項 $x_i$ がきまり次元は $n$ のはず！)．1次独立性：$c_1\boldsymbol{x}^{(1)}+\cdots+c_n\boldsymbol{x}^{(n)}=\boldsymbol{0}=(0,0,\cdots)$ ならば左辺は $(c_1,\cdots,c_n,a_1,c_1+\cdots+a_nc_n,\cdots)$ だから $c_1=\cdots=c_n=0$．一方 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots)\in V$ ははじめの $n$ 項から漸化式で順にきまるから，$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{x}^{(1)}+\cdots+x_n\boldsymbol{x}^{(n)}$ と表される．つまり $V=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}^{(1)}+\cdots+\boldsymbol{K}x^{(n)}$．

**14-4** 数ベクトル空間の場合は§9.3例3のようにわかっていたから，一般のベクトル空間でも(有限次元なら)数ベクトル空間への同型写像があるから成り立つ．ただし直接証明も以下のようにできる．$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m$ の中で1次独立なものを最大個数になるよう選ぶと $l$ 個 $\boldsymbol{v}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{v}_{i_l}$ あったとする：番号をつけかえ $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_l$ としてよい．$l=\dim W=d$ を示せばよい．$l<d$ なら $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_l$ は1次独立だが基底でなく，これらの和(1次結合)で書けない(独立な)元 $\boldsymbol{w}\in W$ がある．一方 $W$ の元は $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_m$ で書けるから $\boldsymbol{w}$ も $\boldsymbol{w}=\sum_{j=1}^m a_j\boldsymbol{v}_j$ と書ける．また $\boldsymbol{v}_{l+1},\cdots,\boldsymbol{v}_m$ は $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_l$ で書ける(そうでないとはじめに $l$ 個より多くを独立にとれたはず)．よって $\boldsymbol{w}=\sum_{j=1}^m a_j\boldsymbol{v}_j$ において $\boldsymbol{v}_{l+1},\cdots,\boldsymbol{v}_m$ を $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_l$ で表せば，$\boldsymbol{w}$ も $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_l$ で表されこれは矛盾．他方，$l>d$ だと $W$ が $d$ 次元ということに反する．

**14-5** (i) 定数変化法による．$u(t)=a(t)e^{\lambda t}$ とすると $\left(\dfrac{d}{dt}-\lambda\right)a(t)e^{\lambda t}=a'(t)\,e^{\lambda t}$ ゆえ，$a'=e^{-\lambda t}f(t)$．よって $a(t)=\int^t e^{-\lambda s}f(s)\,ds$，$u(t)=\int^t e^{\lambda(t-s)}f(s)\,ds$．条件 $u(0)=0$ は積分の下端を0として満たされる．

(ii) $u(t)=\sum_{j=1}^n u_j(t)$，$u_j(t)=a_j(t)e^{\lambda_j t}$ とおき，$a_j(t)$ は $\left(\dfrac{d}{dt}-\lambda\right)a_j(t)\,e^{\lambda t}=f_j(t)$ をみたすと考える．$p\left(\dfrac{d}{dt}\right)u_j=\prod_{i\neq j}\left(\dfrac{d}{dt}-\lambda_i\right)\left(\dfrac{d}{dt}-\lambda_j\right)u_j=\prod_{i\neq j}\left(\dfrac{d}{dt}-\lambda_i\right)f_j$ であるから $p\left(\dfrac{d}{dt}\right)u=\sum_{j=1}^n\prod_{i\neq j}\left(\dfrac{d}{dt}-\lambda_i\right)f_j$．この右辺が $f(t)$ に等しくなればよく，そのため $f_j=c_jf$ ($c_j$ は定数)と仮定すれば $\sum_{j=1}^n\prod_{i\neq j}\left(\dfrac{d}{dt}-\lambda_i\right)c_j=1$ が条件．これを $p$ でわれば，$x=\dfrac{d}{dt}$ として十分条件 $\sum_{j=1}^n\dfrac{c_j}{x-\lambda_j}=\dfrac{1}{p(x)}$ を得る．[(i)の結果を象徴的に $u=p^{-1}f$ ($p(x)=x-\lambda$) と書けば，(ii)の結果は $u=p^{-1}f$ と書ける！]

(iii) $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\dfrac{1/6}{x-1}+\dfrac{-1/2}{x+1}+\dfrac{1/3}{x+2}$ である(右辺の分子は通分し辺々比較してきまるが，関数論を学ぶと $x=1,-1,-2$ で両辺の「留数」を比べて出せるようになる．) よって(ii)より

$$u(t)=\frac{1}{6}\int_0^t e^{(t-s)}f(s)\,ds-\frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)}f(s)\,ds+\frac{1}{3}\int_0^t e^{-2(t-s)}f(s)\,ds.$$

**14-6** (i) $\boldsymbol{u}={}^t[u_1,\cdots,u_n]$ とする：$W(t)=|\boldsymbol{u},\cdots,\boldsymbol{u}^{(u-1)}|$．この微分は各列を微分したものの和で(§16.4の問)，第 $n$ 列の微分の項以外は2つの列が一致し0．

$\therefore\quad W'(t)=|\boldsymbol{u},\cdots,\boldsymbol{u}^{(n-2)},\boldsymbol{u}^{(n)}|=|\boldsymbol{u},\cdots,\boldsymbol{u}^{(n-2)},-a_1\boldsymbol{u}^{(n-1)}-\cdots-a_{n-1}\boldsymbol{u}'|=-a_1W.$

(ii)　(i)より，$W \equiv 0$(恒等的に0)$\Longleftrightarrow$ある$t$で$W(t) = 0$である．

$\Rightarrow$)　独立な解$u_1, \cdots, u_n$に対し，ある$t = s$で($\Leftrightarrow$すべての$t$で)$W = 0$だったとする．これは$c_1u_1^{(i)}(s) + \cdots + c_nu_n^{(i)}(s) = 0$ $(i = 1, 2, \cdots)$をみたす$\boldsymbol{c} = [c_1, \cdots, c_n] \neq \boldsymbol{0}$があることを意味する．すると$u = c_1u_1 + \cdots + c_nu_n$は$n-1$階まですべての値が$t = s$で0の解であり，そのような解は恒等的に0のゼロ解しかない(解の一意性)．つまり$c_1u_1 + \cdots + c_nu_n \equiv 0$．これは矛盾．

$\Leftarrow$)　$c_1u_1^{(i)}(t) + \cdots + c_nu_n^{(i)}(t) = 0$ $(i = 1, 2, \cdots)$の係数行列$U(t) = [u_j^{(i)}(t)]$が条件より可逆ゆえ，$c_1 = \cdots = c_n = 0$．

(iii)　(28)を導いたようにする：$\boldsymbol{v} = {}^t[v(t), v'(t), \cdots, v^{(n-1)}]$が$\boldsymbol{v}' = A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}$をみたせばよい($\boldsymbol{f} = {}^t[0, \cdots, 0, f]$)．(ii)の$U = [u_j^{(i)}]$で$\boldsymbol{v} = U(t)\boldsymbol{c}(t)$と変換しよう．$\boldsymbol{u}_j = {}^t[u_j(t), u_j'(t), \cdots, u_j^{(n-1)}]$は(20)より$\boldsymbol{u}_j' = A(t)\boldsymbol{u}_j$をみたすから，$U'(t) = A(t)U(t)$．よって$\boldsymbol{v}' = U'(t)\boldsymbol{c}(t) + U(t)\boldsymbol{c}'(t) = AU\boldsymbol{c} + U\boldsymbol{c}' = A\boldsymbol{v} + U\boldsymbol{c}'$．これが$A\boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}$になるには，$U\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{f}$．これが(☆)である．

**14-7**　斉次解の基底を$v, w$と書こう．斉次解をある特解$u$だけずらし$u_j$が得られる：$u_j(t) = v + a_jv(t) + b_jw(t)$．斉次解を知るには特解を消去すればよく，$u_2 - u_1$などと差をつくればよい．斉次解がわかれば$L$がわかるだろう．

(i)　$u_2 - u_1 = e^t$，$u_3 - u_2 = e^t + 2$であり，方程式は2階なのでこれらが斉次解の解空間の基底をなす．1と$e^t$が基底と言っても同じなので，斉次型の方程式は$\partial(\partial - 1)u = 0$．つまり$L = \partial(\partial - 1)$である．非斉次型の方程式$Lu = f$を知るには，$Lu_i$を計算し$f$を求めればよい．$Lu_1 = Lu_2 = Lu_3 = -1$であり，これが求める$f$である．∴　$\partial(\partial - 1)u = -1$が求める方程式．

(ii)　$u_2 - u_1 = t^2$，$u_3 - u_2 = t^2 + 1$であり，$1, t^2$を斉次解の基底とする$L$を求めねばならない．他の斉次解$u$が$1, t^2$の1次結合でかならず書けると考えれば，ロンスキアン$W = \begin{vmatrix} u & 1 & t^2 \\ u' & 0 & 2t \\ u'' & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$．これより$tu'' - u' = 0$．これは$u''/u' = 1/t$と変形し$u' = 2At$，$u = At^2 + B$と解ける：たしかに$\mathrm{Ker}\, L = \boldsymbol{R}1 + \boldsymbol{R}t^2$ $(L = t\partial^2 - \partial)$．$f = Lu_i$を求め$f = (t-1)e^t$．

## 15章

**§15.1**　(i)　$\|\boldsymbol{v} \pm \boldsymbol{w}\|^2 = (\boldsymbol{v} \pm \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \pm \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \pm (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \pm (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})$より．　(ii)　(i)の計算より$\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\|^2 - \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|^2 = 2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) + 2(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = 4\mathrm{Re}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$．虚部を出すため$i$倍を考え$\|\boldsymbol{v} \pm i\boldsymbol{w}\|^2 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \pm (\boldsymbol{v}, i\boldsymbol{w}) \pm (i\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) + (i\boldsymbol{w}, i\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \pm i(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mp i(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w})$　∴　$\|\boldsymbol{v} + i\boldsymbol{w}\|^2 - \|\boldsymbol{v} - i\boldsymbol{w}\|^2 = 2i((\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})) = -4\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$．よって$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \dfrac{1}{4}(\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\|^2 - \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|^2 - i\|\boldsymbol{v} + i\boldsymbol{w}\|^2 + i\|\boldsymbol{v} - i\boldsymbol{w}\|^2)$．

**§15.2**　(i)　$B = B^*$，$C = C^*$のとき$(B + iC)^* = B^* - iC^* = B - iC$．よって$A^*A = (B - iC)(B + iC) = B^2 + C^2 + i(BC - CB)$，$AA^* = (B + iC)(B - iC) = B^2 + C^2 - i(BC - CB)$，∴　$A^*A - AA^* = 2i(BC - CB)$．

(ii)　$(A-\lambda)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0} \Longleftrightarrow 0=((A-\lambda)\boldsymbol{v},(A-\lambda)\boldsymbol{v})=((A-\lambda)^*(A-\lambda)\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=((A-\lambda)(A-\lambda)^*\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=((A-\lambda)^*\boldsymbol{v},(A-\lambda)^*\boldsymbol{v})=((A^*-\bar{\lambda})\boldsymbol{v},(A^*-\bar{\lambda}\boldsymbol{v})) \Longleftrightarrow (A^*-\bar{\lambda})\boldsymbol{v}=0$.

(ii)によれば，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1$ を延長し直交基底 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$ を作ると $(\boldsymbol{v}_1,A\boldsymbol{v}_j)=(A^*\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_j)=(\bar{\lambda}\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_j)=0(j\neq 1)$．つまり $A[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n]=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n]\begin{bmatrix}\lambda & * \\ \boldsymbol{0} & A'\end{bmatrix}$ とすると $*$ の部分も 0．$A'$ が正規であることもわかり帰納法でテープリッツの定理が示される(本文ではやや一般に同時三角化の原理から示す)．

§15.3　(i)　$E=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$I=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ とすれば $I^2=E$，$B=\begin{bmatrix}I&O\\O&I\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}O&E\\E&O\end{bmatrix}$，$D=\begin{bmatrix}O&I\\I&O\end{bmatrix}$．$BC=CB=D$ より $BD=DB$，$CD=DC$．

(ii)　$T=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}(=2T^{-1})$ により $T^{-1}IT=\Lambda:=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}(=TIT^{-1})$．$X=\begin{bmatrix}T&T\\T&-T\end{bmatrix}$ を作れば $BX=\begin{bmatrix}IT&IT\\IT&-IT\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T\Lambda&T\Lambda\\T\Lambda&-T\Lambda\end{bmatrix}=X\begin{bmatrix}\Lambda&0\\0&\Lambda\end{bmatrix}$．また $CX=\begin{bmatrix}T&-T\\T&T\end{bmatrix}=X\begin{bmatrix}E&O\\O&-E\end{bmatrix}$，$DX=BCX=BX\begin{bmatrix}E&O\\O&-E\end{bmatrix}=X\begin{bmatrix}\Lambda&O\\O&\Lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E&O\\O&-E\end{bmatrix}=X\begin{bmatrix}\Lambda&O\\O&-\Lambda\end{bmatrix}$．$X^2=\begin{bmatrix}2T^2&O\\O&2T^2\end{bmatrix}=4$ より $X$ は可逆で，これが求めるもの．

(iii)
$$\begin{aligned}X^{-1}QX&=X^{-1}(a+bB+cC+dD)X\\&=a\begin{bmatrix}E&O\\O&E\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}\Lambda&O\\O&\Lambda\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}E&O\\O&-E\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}\Lambda&O\\O&-\Lambda\end{bmatrix}\\&=\mathrm{diag}(a+b+c+d,a-b+c-d,a+b-c-d,a-b-c+d).\end{aligned}$$

$\therefore\ |Q|=(a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)$.

(iv)　直接計算で $|Q|=a^4-2(b^2+c^2+d^2)a^2+(8bcd)a+(b+c+d)(-b+c-d)(b-c-d)(-b-c+d)$．与えられた4次方程式(原点移動で3次の項 $=0$ とできる) $a^4+pa^2+qa+r=0$ を今の形にできれば $a=-(b+c+d)$，$-(-b+c-d)$，$-(b-c-d)$，$-(-b-c+d)$ が解．$b,c,d$ は $p=-2(b^2+c^2+d^2)$，$q=8bcd$，$r=(b+c+d)(-b+c-d)(b-c-d)(-b-c+d)=b^4+c^4+d^4-2b^2c^2-2b^2d^2-2c^2d^2=(b^2+c^2+d^2)^2-4(b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2)$ とできればよいが，これより $b^2$，$c^2$，$d^2$ は $t^3+\frac{p}{2}t+\frac{r-(p/2)^2}{4}t^2-\left(\frac{q}{8}\right)^2$ の解．$b,c$ をこの解の平方根，$d=\frac{q}{8bc}$ とすればよい．

§15.4　(i)　実対称 $(A={}^tA=A^*)$ なので正規．$|A-\lambda E|=-(\lambda-3)(\lambda^2-8\lambda+10)$．固有値は $\lambda=3$，$4\pm\sqrt{6}(=\lambda_\pm)$ ですべて実．各固有値の長さ1の固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_3=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}_\pm=\frac{1}{\sqrt{12\pm2\sqrt{6}}}\begin{bmatrix}1\\-1\mp\sqrt{6}\\2\end{bmatrix}$ がとれ，直交行列 $T=[\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_+,\boldsymbol{v}_-]$ で ${}^tTAT=\mathrm{diag}[3,4+\sqrt{6},4-\sqrt{6}]$．

(ii)　$A=E+A'$，$A'=-{}^tA'$ より．固有方程式は $|B-\lambda|=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+4)$，$\lambda=1$，$1\pm\sqrt{3}i$ が根．$\lambda=1$ の固有ベクトルは実で，正規化し $\boldsymbol{v}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ にとれる．

$\lambda_\pm = 1\pm\sqrt{3}\,i$ に対しては $\boldsymbol{v}_\pm = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ \omega_\pm\\ \omega_\mp\end{bmatrix}\left(\omega_\pm = \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\right)$. これらはエルミート内積について直交するが，実の範囲で考えるため $\boldsymbol{v}_\pm$ の実部と虚部をとると $\dfrac{\boldsymbol{v}_+ + \boldsymbol{v}_-}{2} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}$, $\dfrac{\boldsymbol{v}_+ - \boldsymbol{v}_-}{2i} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$. これらも直交し，長さでわって $\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ とすると $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は正規直交基底. $T = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ が求める直交行列で，$A(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}i) = (1+\sqrt{3}\,i)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}i) = (\boldsymbol{a}-\sqrt{3}\,\boldsymbol{b})+i(\sqrt{3}\,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ より $A[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \sqrt{3}\\ 0 & -\sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$.

§15.5 (i) $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, $\cdots$, $(-1)^n\Delta_n > 0$.

(ii) ア) $4x^2-4xy+4xz+2y^2+3z^2-4yz = 4\left(x-\dfrac{y-z}{2}\right)^2-(y-z)^2+2y^2+3z^2-4yz = 4\left(x-\dfrac{y-z}{2}\right)^2+(y-z)^2+z^2$ より，$(+,+,+)$ (正定値). イ) $x(y+z) + \dfrac{(y+z)^2-(y-z)^2}{4} = \left(x+\dfrac{y+z}{2}\right)^2-x^2-\dfrac{(y-z)^2}{4}$ より，$(+,-,-)$ (非退化だが定値でない). なお $\dfrac{1}{2}((x+y+z)^2-x^2-y^2-z^2)$ と変形しても，変数変換 $(x,y,z)\mapsto(x,y,z,x+y+z) = (x,y,z,w)$ は可逆でなく符号数を結論できない. ウ) $4x(y-w)+4zw = (x+(y-w))^2-(x-(y-w))^2+(z+w)^2-(z-w)^2$ より，$(+,+,-,-)$. エ) $(y-x+2z-w)^2-(x-2z+w)^2+2z^2-2xz-2zw = (y-x+2z-w)^2-(x-z+w)^2-z^2$ と退化しており，$(+,-,-,0)$.

(iii) p. 368 参照.

**練習問題 15-1** (i) エルミート行列ゆえ正規. 固有値は実数のはず，$\det(X-t) = t^3-6t^2+3t+10 = (t-5)(t-2)(t+1)$ なので $t = 5, 2, -1$ が固有値. それぞれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_5 = {}^t[1,0,-1]$, $\boldsymbol{v}_2 = {}^t[1,-i,1]$, $\boldsymbol{v}_{-1} = {}^t[1,2i,1]$ を得，これらは(異なる固有値の固有ベクトルとして，計算しなくても)直交している(これは検算に使える). $\boldsymbol{w}_5 = \dfrac{\boldsymbol{v}_5}{\|\boldsymbol{v}_5\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}{}^t[1,0,-1]$, $\boldsymbol{w}_2 = \dfrac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}{}^t[1,-i,1]$, $\boldsymbol{w}_{-1} = \dfrac{\boldsymbol{v}_{-1}}{\|\boldsymbol{v}_{-1}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}{}^t[1,2i,1]$ と正規化すれば $U := [\boldsymbol{w}_5, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_{-1}]$ はユニタリで

$$AU = A[\boldsymbol{w}_5, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_{-1}] = [5\boldsymbol{w}_5, 2\boldsymbol{w}_2, -\boldsymbol{w}_{-1}] = [\boldsymbol{w}_5, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_{-1}]D = UD,$$

$$D = \begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}. \quad \therefore \quad U = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{3}} & \frac{2i}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$ で $U^{-1}AU = D$ となる. $U$ は $\boldsymbol{w}_k$ の並べかえと各 $\boldsymbol{w}_k$ を絶対値 1 の複素数倍だけきまらない.

(ii) $B = E+C$ と書くと $C$ はエルミート反対称 $(C+C^* = O)$ なので，$B$ は正

規．$|C-\lambda| = \begin{vmatrix} 3i-\lambda & 2\lambda i+6 & 0 \\ 2 & 4i-\lambda & 1 \\ 2\lambda-6i & -(\lambda-4i)^2-1 & 0 \end{vmatrix} = (3i-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2i(\lambda-3i) \\ 2 & (\lambda-3i)(\lambda-5i) \end{vmatrix} = -(\lambda-3i)^2(\lambda-9i)$．$(C-3i)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ の解は 2 次元あり，正規直交化すると $\boldsymbol{u} = \sqrt{5}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v} = \sqrt{30}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 5i \\ -1 \end{bmatrix}$ ととれる．また $\boldsymbol{w} = \sqrt{6}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}$ が $(C-9i)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ の長さ 1 の解にとれる．$U=[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ はユニタリで $U^*BU = U^*(E+C)U = \mathrm{diag}(1+3i, 1+3i, 1+9i)$．

**15-2** （i） $(x, x)_A := {}^t xAx = (a_1+b_1)x_1^2+(b_1+a_2+b_2)x_2^2+(b_2+a_3)x_3^2-2b_1x_1x_2-2b_2x_2x_3 = a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2+b_1(x_1-x_2)^2+b_2(x_2-x_3)^2 \geqq 0$ $(x = {}^t[x_1, x_2, x_3])$．また $(x, x)_A = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$．

（ii） §15.3(37)のような変形を一般に行なえば良いから，$n=2, 3$ では OK．((37)で $a, b', c' > 0$ だから，$\mathrm{diag}[\sqrt{a}, \sqrt{b'}, \sqrt{c'}]P = L$ とすれば $A = {}^tLL$.) $n-1$ 次までできたとし，$A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$（$n$ 次）を考える．$n-1$ 次小行列 $A' = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n-1}$ はやはり正値対称ゆえ対角成分が正の上三角行列 $L'$ で $A' = {}^tL'L'$ と書ける．すると $A = \begin{bmatrix} {}^tL'L' & \boldsymbol{p} \\ {}^t\boldsymbol{p} & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^tL' & 0 \\ {}^t\boldsymbol{q} & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L' & \boldsymbol{q} \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$（${}^t\boldsymbol{p} = [a_{n,1}, \cdots, a_{n,n-1}]$）は ${}^tL'\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$，${}^t\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}+\alpha^2 = a_{nn}$ でみたされ前者は $\boldsymbol{q} = {}^tL'^{-1}\boldsymbol{p}$ と解ける．後者は $\alpha^2 = a_{nn}-{}^t\boldsymbol{q}\boldsymbol{q} = a_{nn}-{}^t\boldsymbol{p}L'^{-1}{}^tL'^{-1}\boldsymbol{p} = a_{nn}-{}^t\boldsymbol{p}A'^{-1}\boldsymbol{p}$ なら良く，$|A| = |L'|^2\alpha^2$ ゆえ $\alpha^2 > 0$．よって $\alpha > 0$ がきまり，$L = \begin{bmatrix} L' & \boldsymbol{q} \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ で $A = {}^tLL$．

（iii） $n=1$ では OK．(ii)の過程を用い帰納法を行うと，$|A| = |A'|\alpha^2 = |A'|(a_{nn}-{}^t\boldsymbol{p}A'^{-1}\boldsymbol{p}) \leqq |A'|a_{nn} \leqq a_{11}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$．(iii)を**アダマールの不等式**という．

（iv） $H$ の固有値を $\lambda_j > 0$ とすれば $E-iH$ は固有値が $1-i\lambda_j \neq 0$ で可逆．$H$ をユニタリ行列 $U$ で $U^*HU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ と対角化すると，$U^*(E-iH)^{-1}(E+iH)U = \mathrm{diag}\left(\dfrac{1+i\lambda_1}{1-i\lambda_1}, \cdots, \dfrac{1+i\lambda_n}{1-i\lambda_n}\right)$ は $\left|\dfrac{1+i\lambda_j}{1-i\lambda_j}\right| = 1$ によりユニタリである．ゆえに $(E-iH)^{-1}(E+iH)$ もユニタリである．

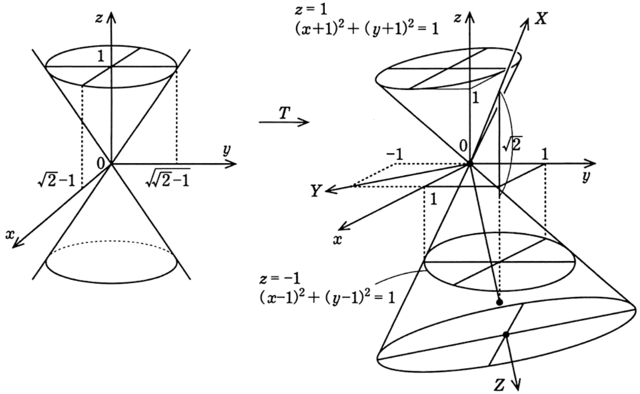
（v） $P^2 = P$ より，$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}+(1-P)\boldsymbol{x}$ と分解することが $\boldsymbol{C}^2 = \mathrm{Im}\,P \oplus \mathrm{Ker}\,P = \mathrm{Im}\,P \oplus \mathrm{Im}(1-P)$ を定める(§13.3 の注意)．これが直交直和ならよいが $(P\boldsymbol{x}, (1-P)\boldsymbol{x}') = (\boldsymbol{x}, P(1-P)\boldsymbol{x}') = 0$ なので OK．

**15-3** （i） $P, P'$ は可逆ゆえ $p+q$ と $p'+q'$ は $A$ の階数として等しい．

（ii） 2 次形式 ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ の変数変換が $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y} = P'\boldsymbol{z}$ で与えられている．$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_j$ $(j = 1, \cdots, p)$ であるとき ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{y}{}^tPAP\boldsymbol{y}$ は正であり，$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{e}_j$ $(j = p'+1, \cdots, n)$ であるとき ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{z}{}^tP'AP'\boldsymbol{z}$ は 0 以下である．よって $P\boldsymbol{e}_j$ $(j = 1, \cdots, p)$ が張る部分空間が $\boldsymbol{0}$ 以外について 2 次形式の値が正となる $p$ 次元部分空間．また $P'\boldsymbol{e}_j$ $(j = p'+1, \cdots, n)$ が張る部分空間が 2 次形式の値が 0 以下の $n-p'$ 次元部分空間．

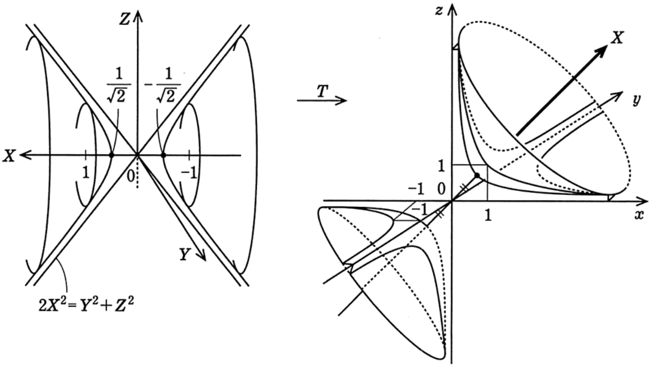
（iii） $p > p'$ とすると $p+(n-p') > n$ なので(ii)の 2 つの空間は $\boldsymbol{0}$ でない共通元 $\boldsymbol{x}$ をもつが，一方では ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} > 0$，もう一方で ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \leqq 0$ となり矛盾．$p < p'$ でも同様．よって $p = p'$．

**15 - 4**　$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ と書く．（i）$B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ により ${}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x}=0$．$|B-\lambda|=0$ より $\lambda=1,\ 1\pm\sqrt{2}$．固有ベクトルを長さ1の右手系にとると $[\boldsymbol{v}_+,\ \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_-]=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&\sqrt{2}&1\\1&-\sqrt{2}&1\\\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\end{bmatrix}$．これを $T$ とし，$\boldsymbol{x}=T\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}$ とすれば $(1+\sqrt{2})X^2+Y^2+(1-\sqrt{2})Z^2=0$．$1-\sqrt{2}<0$ に注意し $(1+\sqrt{2})X^2+Y^2=(\sqrt{2}-1)Z^2$ と変形すれば $XYZ$ 空間での楕円錐を得，$T$ で移し概形を得る．（概形は $(x+z)^2+(y+z)^2-z^2=0$ と変形してもわかる：$x'=x+z$，$y'=y+z$，$z'=z$ は円錐 $x'^2+y'^2=z'^2$ を描くので，これをずらせばよい．）



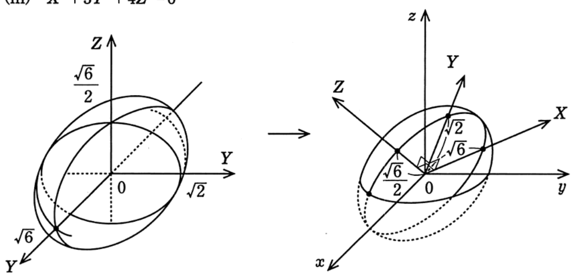

（ii）$B=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ の固有値は $2,\ -1$（重根），$\boldsymbol{v}_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$（長さ 1 とした）が固有値 2 の固有ベクトルであり，これと直交する $\mathbf{0}$ でないベクトルはすべて固有値 $-1$ の固有ベクトルである．$\boldsymbol{v}_-=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}'_-=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$ とし $T=[\boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_-,\ \boldsymbol{v}'_-]$ とおく．${}^tTBT=\mathrm{diag}[2,-1,-1]$ であり $\boldsymbol{x}=T\,{}^t[X,Y,Z]$ とすれば $2X^2-Y^2-Z^2=1$ で 2 葉双曲面．（なお，$Z>0$ の部分は $x,y,z\geqq 0$ の象限には含まれない：平面 $x=0$ での交線は双曲線 $yz=1$ となる．）

(ii) $2X^2-Y^2-Z^2=1$ $\qquad$ $xy+yz+zx=1$

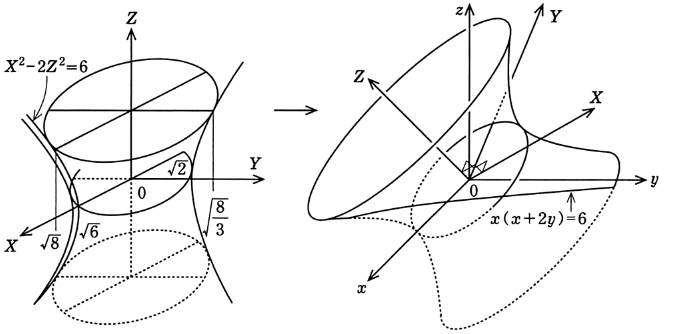



(iii) $B=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ の固有値は $\lambda=1,3,4$. 固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v}_4=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ にとり, $T=[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4]$($|T|=1$) により $\boldsymbol{x}=T\,{}^t[X, Y, Z]$ とすると $X^2+3Y^2+4Z^2=6$(楕円面).

(iii) $X^2+3Y^2+4Z^2=6$




(iv) $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ の固有値は $\lambda=1,3,-2$ で, 固有ベクトルを求めると (iii)のものと一致し $BT=T\,\mathrm{diag}[1,3,-2]$. (すなわち $B_{iii}, B_{iv}$ は同時対角化される. 実際 $B_{iii}B_{iv}=B_{iv}B_{iii}$.) こちらは1葉双曲面 $X^2+3Y^2-2Z^2=6$ だが $Z=0$ では(iii)と同じ楕円である.




**15-5** (i) $\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = [-e^{-x}x^n]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}nx^{n-1}dx = n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = \cdots$ $= n!\int_0^\infty e^{-x}dx = n![-e^{-x}]_0^\infty = n!.$

(ii) (i)より $f_0 = 1$. $f_1(x) = a+bx$ とおくと $0 = (1, f_1) = (1, a+bx) = a(1,1) + b(1,x) = a+b$, よって $f_1 = b(x-1)$. $(x-1, x-1) = (x-1, x) = (x,x)-(x,1) = 2!-1! = 1$ より, $f_1 = x-1$, $f_2 = af_0+bf_1+cx^2$ とおくと, $(f_0, f_1) = 0$ より $0 = (f_0, f_2) = (f_0, af_0+bf_1+cx^2) = a+c(f_0, x^2) = a+2c$, $0 = (f_1, f_2) = (f_1, af_0+bf_1+cx^2) = b+c(x-1, x^2) = b+(3!-2!)c = b+4c$, よって $f_2 = c(-2f_0-4f_1+x^2)$. さらに $(f_2, f_2) = 1$ のためには $(-2f_0-4f_1+x^2, -2f_0-4f_1+x^2) = (x^2, -2f_0-4f_1+x^2) = -2\cdot 2!-4\cdot(x^2, x-1)+(x^2, x^2) = -4-16+24 = 4$.

$\therefore\ c = \dfrac{1}{2}$, $f_2 = \dfrac{1}{2}(-2-4(x-1)+x^2)$.

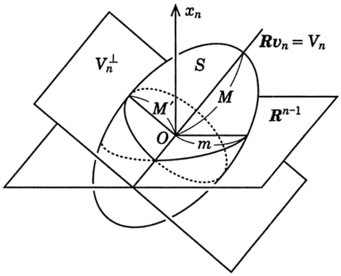
最後に $f_3 = af_0+bf_1+cf_2+dx^3$ とおくと, $(f_i, f_j) = 0\,(i<j)$ より $0 = (f_0, f_3) = (f_0, af_0+bf_1+cf_2+dx^3) = a+d(f_0, x^3) = a+3!c = a+6c$, $0 = (f_1, f_3) = (f_1, bf_1+dx^3) = b+d(x-1, x^3) = b+(4!-3!)d$, $0 = (f_2, f_3) = (f_2, cf_2+dx^3) = c+d\left(\dfrac{x^2-4x+2}{2}, x^3\right) = c+\dfrac{d}{2}(5!-4\cdot4!+2\cdot3!)$ よって $f_3 = d(-6f_0-18f_1-18f_2+x^3)$. さらに $(f_3, f_3) = 1$ のためには $1/d^2 = (d^{-1}f_3, d^{-1}f_3) = (x^3, -6f_0-18f_1-18f_2+x^3) = -6\cdot3!-18(x^3, x-1)-18\left(x^3, \dfrac{x^2-4x+2}{2}\right)+(x^3, x^3) = 36$ $\therefore\ d = 1/\sqrt{36} = 1/6$.

($f_k$ を一般に得るには, 以下どうしたらよいか? 各自考えよ, または調べよ.)

**15-6** (i) $A$ を直交行列 $T$ で $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ と対角化すれば, $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = \lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$ ($T\boldsymbol{x} = {}^t[y_1, \cdots, y_n]$, $|\boldsymbol{x}| = 1 \Leftrightarrow y_1^2+\cdots+y_n^2 = 1$). $y_1^2 = 1-y_2^2-\cdots-y_n^2$ より $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = \lambda_1(1-y_2^2-\cdots-y_n^2)+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2 = \lambda_1+(\lambda_2-\lambda_1)y_2^2+\cdots(\lambda_n-\lambda_1)y_n^2$ であり, 第1項以外(0以下)が0のとき最大で $\lambda_1$ となる. $\lambda_2$ については $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{v}_1 \Leftrightarrow y_1 = 0$ であるから, $\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_2 y_n^2$ について同様に考えればよい.

(ii) (i)のように対角化して考えれば, $S:(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = 1$ 上の点の原点からの距離

の最大が $\sqrt{\lambda_n}^{-1}$. $A'$ を考えることは $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})$ を $n-1$ 次元部分空間 $\{{}^t[x_1, \cdots, x_{n-1}, 0]\}$ $= \boldsymbol{R}^{n-1}$ で考えることにあたり, $S \cap \boldsymbol{R}^{n-1}$ の原点からの距離の最大 $m$ は $M = \sqrt{\lambda_n}^{-1}$ 以下だから, $m = \sqrt{\lambda}^{-1} \leqq \sqrt{\lambda_n}^{-1} \therefore \lambda_n \leqq \lambda$. 一方 $\boldsymbol{v}_n$ を固有値 $\lambda_n$ の固有ベクトル, $V_n^\perp = (\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}_n)^\perp$ とすれば, $S \cap V_n^\perp$ の原点からの距離の最大 $M'$ が $\sqrt{\lambda_{n-1}}^{-1}$ である. 一般に $n-1$ 次元部分空間 $V$ による $S$ の断面 $S \cup V$ で原点からの距離の最大を考えれば, それは $\sqrt{\lambda_{n-1}}^{-1}$ 以上である(∵ (i)の後半と同様, 下図). $V = \{{}^t[x_1, \cdots, x_{n-1}, 0]\}$ のときを考えれば $\sqrt{\lambda}^{-1} \geqq \sqrt{\lambda_{n-1}}^{-1}$, ∴ $\lambda \leqq \lambda_{n-1}$. $\sqrt{\lambda_{n-1}}^{-1} = M' \leqq m \leqq M = \sqrt{\lambda_n}^{-1}$.




**15-7** (i) $f(a, b)$ が最小となるためには $\dfrac{\partial f}{\partial a} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial b} = 0$ が必要. それぞれ $\sum x_i(ax_i + b - y_i) = 0$, $\sum(ax_i + b - y_i) = 0 \left(\sum = \sum_{j=1}^{n}\right)$ であり, 整理すると $(\sum x_j^2)a + (\sum x_j)b = \sum x_j y_j$, $(\sum x_j)a + nb = \sum y_j$. これを書き直したのが問題の式である.

(ii) (i)の係数行列式 $D := |X{}^tX| = n\sum x_j^n - (\sum x_j)^2$ が 0 でなければよい. これは $x_j$ の 2 次形式であり, 対称行列 $B = t - \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \vdots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ $(t = n)$ で表される. これは 13-1(v)で調べた行列であり, $t = n$ では階数 $n-1$ で 1 次元の核 ${}^t[1, \cdots, 1]$ をもつ. すなわち ${}^t[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n] = c[1, \cdots, 1]$ ならば $B\boldsymbol{x} = 0$ であるが, これは $nx_1 = \cdots = nx_n = x_1 + \cdots + x_n$ を意味している. よって $x_j$ たちの少くとも 2 つが相異なれば $D \neq 0$.

## 16章

**§16.1** (i) $(x-y)^2 + (x-2y+z) = x'^2 + y' = c$ とみると放物柱面(§5.1)であることが(ほぼ)わかる. ただし $x' = x-y$, $y' = x-2y+z$, $z' = z$ は直交変換でない 1 次変換なので, さらに左辺を $(x-y)^2 + 3\dfrac{x-y}{2} - \dfrac{x-y}{2} + z = \left(x - y - \dfrac{3}{4}\right)^2 - \dfrac{x+y-2z}{2} - \dfrac{9}{16}$ としよう. $X = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$, $Y = \dfrac{x+y-2z}{\sqrt{6}}$ とおくと $\left(\sqrt{2}\,X - \dfrac{3}{4}\right)^2$

$-\dfrac{\sqrt{6}}{2}Y = C = c+\dfrac{9}{16}$. この取り方により $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ a & b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ における $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]$, $\left[\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right]$ が直交し長さ 1 になる．これらのベクトル積として $[a, b, c] = \dfrac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1](= \boldsymbol{d})$ とし $Z = \dfrac{x+y+z}{\sqrt{3}}$ とすれば $X, Y, Z$ は直交座標系で，$\left(\sqrt{2}X-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{\sqrt{6}}{2}Y = C$ ($Z$：任意) は $Z$ 軸 ($\boldsymbol{d}$ を方向ベクトルとする直線 $x = y = z$) と平行な放物柱面と結論できる．

（ii） $f, f'$ のアフィン変換としての行列表示が $\begin{bmatrix} R & \boldsymbol{p} \\ O & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} R' & \boldsymbol{p}' \\ O & 1 \end{bmatrix}$ ならば，
$\begin{bmatrix} f\circ f'(\boldsymbol{x}) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{p} \\ O & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R' & \boldsymbol{p}' \\ O & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RR' & R\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{p} \\ O & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{bmatrix}$.

**§ 16. 2**　（i） 直線を $\alpha x+\beta y+\gamma = 0$ ($z = 1$) とする．これは $[\alpha, \beta, \gamma]\boldsymbol{x} = 0$ ($\boldsymbol{x} = {}^t[x, y, 1]$) と書ける．$\boldsymbol{x}_A = A\boldsymbol{x}$ を変換(14)とすれば $\boldsymbol{x}_A$ は $[\alpha, \beta, \gamma]A^{-1}\boldsymbol{x}_A = 0$ をみたし，${}^t[x_A/z_A, y_A/z_A, 1]$ も同じ方程式をみたすから直線をなす．　（ii） $A_j = \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{bmatrix}$ とすると $A_1(A_2(z)) = \dfrac{a_1A_2(z)+b_1}{c_1A_2(z)+d_1} = \dfrac{a_1\dfrac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}+b_1}{c_1\dfrac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}+d_1} = \dfrac{a_1(a_2z+b_2)+b_1(c_2z+d_2)}{c_1(a_2z+b_2)+d_1(c_2z+d_2)}$
$= \dfrac{(a_1a_2+b_1c_2)z+(a_1b_2++b_1d_2)}{(c_1a_2+d_1c_2)z+(c_1b_2+d_1d_2)} = (A_1A_2)(z)$.

**§ 16. 3**　行列の積は結合則をみたし，単位元 = 単位行列 = $E \in SL_n(\boldsymbol{Z})$．積と逆元で閉じれば群．$A$，$B$ とも成分が整数なら $AB$ の成分も整数で，$|A| = |B| = 1$ なら $|AB| = 1$：$SL_n(\boldsymbol{Z})$ は積で閉じる．$|A| = 1$ とクラメルの公式 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\hat{A}$ より，$SL_n(\boldsymbol{Z})$ は逆行列でも閉じる($\because$　$|A^{-1}| = |A|^{-1} = 1$ で，$\hat{A}$ の成分は整数)．$SL_n(\boldsymbol{Z})$ は，成分が整数のベクトルからなる格子 $\boldsymbol{Z}^n$ を保つ線型写像で，体積を保つもの全体である ($A \in M_{n,n}(\boldsymbol{R})$，$|A| = 1$ かつ $A(\boldsymbol{Z}^n) \subset \boldsymbol{Z}^n \Rightarrow A \in SL_n(\boldsymbol{Z}^n)$)．実際 $A\boldsymbol{e}_j \in \boldsymbol{Z}^n$ とは成分が整数であること，体積を保てば $|A| = 1$.

**§ 16. 4**　（i） $(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$ が $S$ 上を動き，$t = 0$ で点 P にいるとする．$x^2+2xy-3yz+z^2+4 = 0$ を微分すると $2xx'+2x'y+2xy'-3y'z-3yz'+2zz' = 0$．$t = 0$ とすれば $2x'+4x'+2y'-9y'-6z'+6z' = 6x'-7y' = 0$，これを接ベクトル $(x', y', z')$ がみたす．接平面上の点は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を加えた $(x'+1, y'+2, z'+3) = (x, y, z)$ として得られるから $6(x-1)-7(y-2) = 0$，$\therefore$　$6x-7y = -8(= 2\cdot(-4))$.

（ii） $(a_{\sigma_{1,1}}(t)\cdots a_{\sigma_{n,n}}(t))' = \sum_{j=1}^{n} a_{\sigma_{1,1}}(t)\cdots a'_{\sigma_{j,j}}(t)\cdots a_{\sigma_{n,n}}(t)$ であるから，$|A(t)| = \sum_{\sigma}\operatorname{sgn}\sigma\, a_{\sigma_{1,1}}(t)\cdots a_{\sigma_{n,n}}(t)$ の微分も $j$ 列成分のみを微分したものの和として

$$\sum_{j}\sum_{\sigma}\operatorname{sgn}\sigma\, a_{\sigma_{1,1}}(t)\cdots a'_{\sigma_{j,j}}(t)\cdots a_{\sigma_{n,n}}(t) = \sum_{j}|\boldsymbol{a}_1(t), \cdots, \boldsymbol{a}'_j(t), \cdots, \boldsymbol{a}_n(t)|.$$

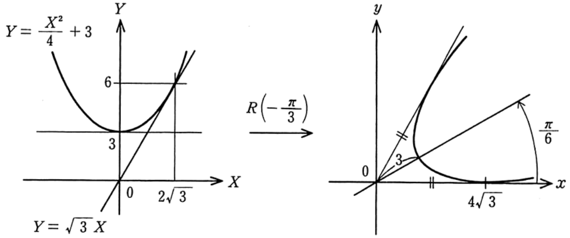
**§ 16. 5**　（i） (47)：$t^2$ の項を拾う．$A^2$ の係数は $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-1$ として 0 となり，$B^2$ も同様．$AB$ の係数は $1\cdot1+1\cdot(-1)+(-1)(-1) = 1$，$BA$ の係数は $1(-1) = -1$.
(49)：$[[AB]C]+[[BC]A]+[[CA]B] = (AB-BA)C-C(AB-BA)+(BC-CB)$

$A-A(BC-CB)+(CA-AC)B-B(CA-AC) = O$. (50)：$E_{ij}$ を行列単位とすれば，$[E_1, E_2] = E_{21}-E_{12} = E_3$. 他も同様.

(ii) $E+\theta E_1+\dfrac{\theta^2}{2}E_1^2+\cdots$ において，初項の $E$ (単位行列)から (1, 1) 成分 1 が出る以外は 1 行目，1 列目への寄与がなく，残りは§ 5.5 の $e^{tJ} = R(t)$ の計算と同じ．同様にして $e^{\theta E_2} = Y(\theta)$, $e^{\theta E_3} = Z(\theta)$.

(iii) $E_{ij}-E_{ji}(i<j)$ が基底で，次元は $n(n-1)/2$.（これは $O(n)$ の元すなわち $n$ 次直交行列がいくつのパラメータできまるかを示す数だが，それがベクトル空間の次元として線型代数で求まった.）

**練習問題 16-1** (i) $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = R\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ により $Y = \dfrac{X^2}{4}+3$ と標準化され，軸が $y = x\tan\dfrac{\pi}{6}$ で $x = 4\sqrt{3}$ で軸と接する放物線である.




(ii) $B = \begin{bmatrix} 3 & 3\sqrt{6} & -5 \\ 3\sqrt{6} & 10 & 3\sqrt{6} \\ -5 & 3\sqrt{6} & 3 \end{bmatrix}$ とし，左辺を $Q$ とおく．もし $Q$ が変数 $x' = x-a$, $y' = y-b$, $z' = z-c$ の斉次 2 次式ならば，$(a, b, c)$ は $\mathrm{grad}_{(a,b,c)}Q = (Q_x, Q_y, Q_z)_{(a,b,c)} = \mathbf{0}$ より求まる．すなわち $2B\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 12\sqrt{6} \\ -4 \end{bmatrix}$. $B$ は可逆で $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を得るから，$\boldsymbol{x}' = {}^t[x-1, 0, z-1]$ により ${}^t\boldsymbol{x}'B\boldsymbol{x}' = k$ となる.

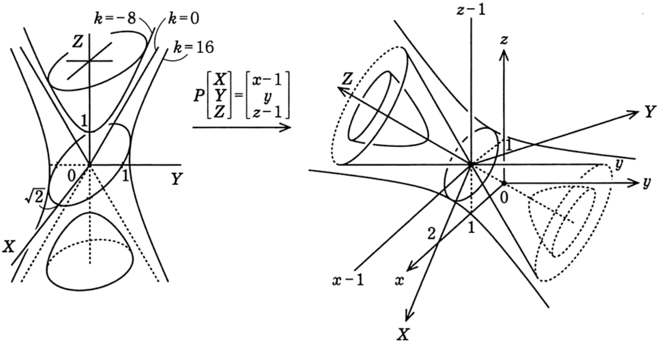
$B$ を対角化すると，8, 16, −8 が固有値であり，固有ベクトルをならべた直交行列として

$$T = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{8}} & \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}} & -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{8}} & \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \end{bmatrix}$$

を得る．すなわち ${}^tTBT = 8\mathrm{diag}[1, 2, -1]$. よってこの曲面は双曲面 $X^2+2Y^2-Z^2 = k$ を $T$ で変換し ${}^t[1, 0, 1]$ だけ平行移動してえられる.

(iii) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ は(ii)と異なり退化しているが $\tilde{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} & B & & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$

$X^2+2Y^2-Z^2=\frac{k}{8}$ $\qquad$ $3x^2+10y^2+3z^2+6\sqrt{6}(xy+yz)-10zx+4x+4z-12\sqrt{6}y-6=k$



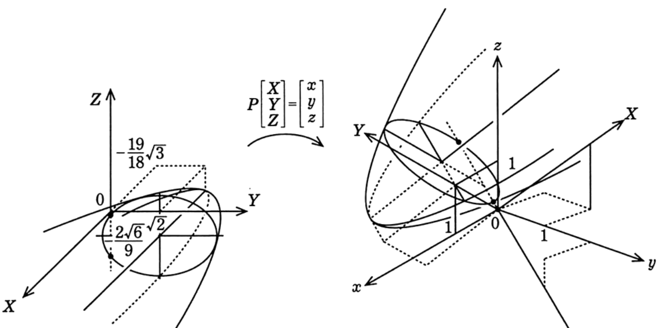

で $[x,y,z,1]\tilde{B}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\1\end{bmatrix}=0$ と書ける．直交行列 $P=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$ で

${}^tPBP=\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 3\end{bmatrix}=D$ と対角化でき，$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{X}$ $\left(\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\ \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}\right)$ により

$$0=[{}^t\boldsymbol{x},1]\tilde{B}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\1\end{bmatrix}=[{}^t\boldsymbol{x},1]\left[\begin{array}{c|c}PD{}^tP & \boldsymbol{v}\\ \hline {}^t\boldsymbol{v} & -1\end{array}\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\1\end{bmatrix}=[{}^t\boldsymbol{X},1]\left[\begin{array}{c|c}D & {}^tP\boldsymbol{v}\\ \hline {}^t\boldsymbol{v}P & -1\end{array}\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\\1\end{bmatrix}$$

$\left(\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}\right)$．${}^t\boldsymbol{v}P={}^t({}^tP\boldsymbol{v})=\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},-\sqrt{2},-\frac{4}{\sqrt{6}}\right]$ ゆえ

$$Y^2+3Z^2-\frac{2}{\sqrt{3}}X-2\sqrt{2}\,Y+\frac{8}{\sqrt{6}}Z-1=(Y-\sqrt{2})^2+3\left(Z+\frac{4}{3\sqrt{6}}\right)^2-\frac{2}{\sqrt{3}}X-\frac{19}{9}$$




$X=\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{(Y-\sqrt{2})^2+3\left(Z+\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)^2-\frac{19}{9}\right\}$

$=0$, $X=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left\{(Y-\sqrt{2})^2+3\left(Z+\dfrac{2\sqrt{6}}{9}\right)^2-\dfrac{19}{9}\right\}$. 概形は前ページの下図のとおりで楕円放物面である.

**16-2** $f(O)=O'$ とすれば $F(P):=f(P)-\overrightarrow{OO'}$ も $f$ と $\overrightarrow{OO'}$ による平行移動 $D$ との合成ゆえ距離を変えない. (とくに $|\overrightarrow{F(P)F(Q)}|=0$ なら $|\overrightarrow{PQ}|=0$ より $P=Q$, $\therefore$ $F$ は単射.) $F$ は距離を保つので内積も保つ ($\because$ $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\frac{1}{2}(|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}|^2-|\boldsymbol{v}|^2-|\boldsymbol{w}|^2)$). 点をその位置ベクトルと同じとみると $|(\overrightarrow{F(P)}+\overrightarrow{F(Q)})-\overrightarrow{F(P+Q)}|^2=(\overrightarrow{F(P)},\overrightarrow{F(P)})+(\overrightarrow{F(Q)},\overrightarrow{F(Q)})+(\overrightarrow{F(P+Q)},\overrightarrow{F(P+Q)})+2(\overrightarrow{F(P)},\overrightarrow{F(Q)})-2(\overrightarrow{F(P)},\overrightarrow{F(P+Q)})-2(\overrightarrow{F(Q)},F(\overrightarrow{P+Q}))=(\overrightarrow{P},\overrightarrow{P})+(\overrightarrow{Q},\overrightarrow{Q})+(\overrightarrow{P+Q},\overrightarrow{P+Q})+2(\overrightarrow{P},\overrightarrow{Q})-2(\overrightarrow{P},\overrightarrow{P+Q})-2(\overrightarrow{Q},\overrightarrow{P+Q})=0$. $\therefore$ $\overrightarrow{F(P)}+\overrightarrow{F(Q)}=\overrightarrow{F(P+Q)}$. またすべての $Q$ に対し $(k\overrightarrow{F(P)}-\overrightarrow{F(kP)},\overrightarrow{F(Q)})=k(\overrightarrow{F(P)},\overrightarrow{F(Q)})-(\overrightarrow{F(kP)},\overrightarrow{F(Q)})=k(\overrightarrow{P},\overrightarrow{Q})-(k\overrightarrow{P},\overrightarrow{Q})=0$. $\therefore$ $k\overrightarrow{F(P)}=\overrightarrow{F(kP)}$. よって $F$ は線型写像である. 距離を保つ線型写像とは直交変換のこと. 直交変換 $T$ はもし裏返しを含めば(行列式が $-1$ なら), 任意の鏡映 $r$ と合成することで(原点を中心とする)回転になる. これを $R$ とすれば, $T=R\circ r$. $T=F=D\circ f$ だから $D\circ f=R\circ r$, $f=D^{-1}\circ R\circ r$. (直観によらない分, この証明は一般次元で通用する.)

**16-3** (i) $[\sigma_1,\sigma_2](=-[\sigma_2,\sigma_1])=2i\sigma_3$, $[\sigma_2,\sigma_3]=2i\sigma_1$, $[\sigma_3,\sigma_1]=2i\sigma_2$ ; $e^{it\sigma_1}=\begin{bmatrix}\cosh it & \sinh it\\ \sinh it & \cosh it\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos t & i\sin t\\ i\sin t & \cos t\end{bmatrix}$, $e^{it\sigma_2}=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$, $e^{it\sigma_3}=\begin{bmatrix}e^{it} & 0\\ 0 & e^{-it}\end{bmatrix}$ (§5.5参照. すべて行列式1かつユニタリで, $SU(2)$ の元.)

(ii) $X\in su(2)$ は条件より $X=\begin{bmatrix}a & b\\ -\bar{b} & -a\end{bmatrix}$($a=i\alpha$ は純虚, $b=\beta+i\gamma$ は複素数)の形で, $X=\alpha i\sigma_3+\beta i\sigma_2+\gamma i\sigma_1$($\alpha,\beta,\gamma$ は実数)と表せる. $i\sigma_1$, $i\sigma_2, i\sigma_3$ は1次独立でこの表示は1意. ($su(2)$ は実ベクトル空間であることに注意.)

**16-4** (i) $X$, $Y\in V$ とすると ${}^t(X+Y)J+J(X+Y)={}^tXJ+{}^tYJ+JX+JY=({}^tXJ+JX)+({}^tYJ+JY)=O$. また $a\in\boldsymbol{C}$ に対し ${}^t(aX)J+J(aX)=a({}^tXJ+JX)=O$. よって $V$ は和と複素数倍で閉じ, 複素ベクトル空間.

(ii) $X=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$($A,B,C,D$ は $n$ 次)とすると ${}^tXJ+JX=\begin{bmatrix}-{}^tC & {}^tA\\ -{}^tD & {}^tB\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}{}^tC & {}^tD\\ -{}^tA & -{}^tB\end{bmatrix}$. $\therefore$ $B={}^tB$, $C={}^tC$, $D=-{}^tA$. 任意の $A$ と対称な $B, C$ で $X$ がきまり, 対称行列は $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個のパラメータできまるから, 次元は $n^2+2\dfrac{n(n+1)}{2}=2n^2+n$. ($A=E_{ij}(i,j=1,\cdots,n)$, $B=C=O$ ; $A=O$, $B=E_{ij}+E_{ji}(i\leqq j)$, $C=O$ ; $A=O$, $B=O$, $C=E_{ij}+E_{ji}(i\leqq j)$ のときの $X$ が基底をなす.)

(iii) 任意の $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ に対し ${}^t(e^{sX}\boldsymbol{v})J(e^{sX}\boldsymbol{w})={}^t\boldsymbol{v}{}^tJ\boldsymbol{w}$ ならば ${}^t(e^{sX})Je^{sX}=J$. $s$ で微分し ${}^t(Xe^{sX})Je^{sX}+{}^t(e^{sX})JXe^{sX}=O$, $s=0$ とおき ${}^tXJ+JX=O$ が必要. この計算より $J^{-1t}(e^{sX})J=e^{-sX}$ なら十分. ${}^t(e^{sX})=\sum\dfrac{s^n}{n!}({}^tX^n)=e^{s{}^tX}$ に注意する. $J^{-1}=-J$ であるので ${}^tXJ+JX=O\Longleftrightarrow{}^tX=JXJ$. $\therefore$ $J^{-1}e^{s{}^tX}J=\sum\dfrac{s^n}{n!}(J^{-1t}XJ)^n=\sum\dfrac{s^n}{n!}(-X)^n=e^{-sX}$. 本問の $V$ は, 解析力学(山本義隆・中村孔一『解析力学 I, II』朝倉物理学大系, 朝倉書店(1998)はよい教科書である)における正準変換の対称性に関係する.

**16-5**(i) $A$ を回転行列 $T$ で ${}^tTAT = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ と対角化する $(\lambda_j > 0)$. $T^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = {}^t[y_1, \cdots, y_n]$ とおくと $|T| = 1$ より $dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n = dy_1\wedge\cdots\wedge dy_n$.

$$\therefore \quad \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x} = \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-{}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{y}}d\boldsymbol{y} = \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-(\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2)}dy_1\cdots dy_n$$

$$= \int_{\boldsymbol{R}} e^{-\lambda_1 y_1^2}dy_1\cdots\int_{\boldsymbol{R}} e^{-\lambda_n y_n^2}dy_n = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1}}\cdots\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_n}}.$$

ここでガウス積分 $\int_{\boldsymbol{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ を用いた.

(ii) ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} - 2{}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} = {}^t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}) - {}^t\boldsymbol{a}A^{-1}\boldsymbol{a}\ (\boldsymbol{b} = A^{-1}\boldsymbol{a})$ より

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}+2{}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{x} = \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-{}^t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})+{}^t\boldsymbol{a}A^{-1}\boldsymbol{a}}d\boldsymbol{x} \overset{(i)}{=} e^{{}^t\boldsymbol{a}A^{-1}\boldsymbol{a}}\sqrt{\frac{\pi^n}{|A|}}.$$

**16-6** (i) (37)と同様にして, 一般に $\|e^X\|_o \leqq e^{\|X\|_o}$ である.

(ii) ヒントの変形より,

$$\text{左辺} \leqq \sum_{k=0}^{n} \|S_n\|_o^k \|S_n - T_n\|_o \|T_n\|_o^{n-k-1} \leqq n\max(\|S_n\|_o, \|T_n\|_o)^n \|S_n - T_n\|_o.$$

これに(i)を使う.

(iii) テーラー展開より $\left\|S_n - \left(1+\frac{A+B}{n}\right)\right\|_o \leqq e^x - (1+x)|\left(x = \frac{1}{n}\|A+B\|_o\right)$, $\left\|T_n - \left(1+\frac{A+B}{n}\right)\right\|_o \leqq |e^x - (1+x)\|_o\left(x = \frac{1}{n}(\|A\|_o + \|B\|_o)\right)$ であり, 正数 $x$ に対しテーラー展開より $|e^x - (1+x)| \leqq \frac{x^2}{2}e^x$. $\therefore\ \|S_n - T_n\|_o \leqq \left\|S_N - \left(1+\frac{A+B}{n}\right)\right\|_o + \left\|T_n - \left(1+\frac{A+B}{n}\right)\right\|_o \leqq \frac{M}{n^2}$, $M = (\|A\|_o + \|B\|_o)^2 e^{\|A\|_o+\|B\|_o}$.

## 17章

**§17.1** $A = [a_{ij}]$ に対し $\begin{bmatrix} 0 & & & O \\ a_{11} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$ を各々 $A_-$, $A_+$ と, また $A_0 = \mathrm{diag}[a_{11}, \cdots, a_{nn}]$ とおくと $A = A_- + A_0 + A_+$. (交代行列)+(上三角)と見るには $A = (A_- - {}^t(A_-)) + ({}^t(A_-) + A_0 + A_+)$ とすればよい.

**§17.2** (i) 略 (ii) たとえば $I = \{f(x) \in \boldsymbol{C}[x] | f(x)$ は $x^n, x^{n+1}, \cdots$ の和$\}$ $= \{f(x) \in \boldsymbol{C}[x] | f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0\} = x^n\boldsymbol{C}[x]$ はその例. ほかに $a_1, \cdots, a_n \in \boldsymbol{C}$ を異なる $n$ 点として $I = \{f(x) \in \boldsymbol{C}[x] | f(a_1) = \cdots = f(a_n) = 0\}$ も例で, いくらでもある. (iii) $\mathrm{Im}\,\partial_2 = \{0\}$ より $H_1 = \ker\partial_1 = \boldsymbol{K}(PQ+QR+RP) \oplus \boldsymbol{K}(PS+SR+RP)$ で2次元. ($PQ+QR+RP = \gamma_1$, $PR+RS+SP = \gamma_2$ でなく $PQ+QR+RP$, $PQ+QR+RS+SP = \gamma_1+\gamma_2$ なども基底になる.)

**§17.3** (i) $dx = dr\cos\theta + r\cdot d(\cos\theta) = dr\cos\theta - r\sin\theta d\theta$, $dy = dr\sin\theta + r\cdot d(\sin\theta) = dr\sin\theta + r\cdot\cos\theta d\theta$. (ii) $r^2 = x^2+y^2$ より $2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$. また $\frac{y}{x} = \tan\theta$ を $x$ で偏微分し $-\frac{y}{x^2} = \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{1}{\cos^2\theta}$. $\therefore\ \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\cos^2\theta = -\frac{y}{r^2}$. よって $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{y}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}$. これで第1行目が確認できた.

残りも $\partial f/\partial y$ を同様に考え確認できるが，(i)より出ることを知っていると便利である．

§17.4　略

**練習問題 17-1**　(i)　$\operatorname{Ker} f$ の基底 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ を延長した $V$ の基底を $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ とすれば，$V/\operatorname{Ker} f$ の基底は $[\boldsymbol{v}_{r+1}], \cdots, [\boldsymbol{v}_n]$ ととれる．$f(\boldsymbol{v}_{r+1}), \cdots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は $\operatorname{Im} f$ の基底になり，$V/\operatorname{Ker} f$ から $\operatorname{Im} f$ への線型写像を $\boldsymbol{v}_j \mapsto f(\boldsymbol{v}_j)\ (r+1 \leqq j \leqq n)$ と定めれば同型写像になる．(注：この同型は，次元定理を空間の間の等式に昇格させたものといえる．)　(ii)　$f(\boldsymbol{u} \bmod W) := \boldsymbol{u} \bmod V$ とする．$\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}\,(\boldsymbol{w} \in W)$ としても $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}) \bmod V = \boldsymbol{u} \bmod V$ であり，$f$ は $U/W$ の元に対し定まり写像 $f: U/W \to U/V$ ができる．$\boldsymbol{u} \in U$ は任意だから $f$ は全射である．$f(\boldsymbol{u} \bmod W) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{u} \in V$ より $\operatorname{Ker} f$ は $\{\boldsymbol{u}+W \mid \boldsymbol{u} \in V\} = V/W$ と一致する．よって((i)より) $(U/W)/\operatorname{Ker} f = (U/W)/(V/W)$ は $U/V$ と同型である．

**17-2**　(i)　$\operatorname{Im} f_{j+1} \ni f_{j+1}(\boldsymbol{v})$ に対し，$f_j(f_{j+1}(\boldsymbol{v})) = (f_j \circ f_{j+1})(\boldsymbol{v}) = 0$.

(ii)　$\dim V_j = v_j$，$\dim H_j = h_j$，$\dim \operatorname{Im} f_j = r_j$，$\dim \operatorname{Ker} f_j = n_j$ と書く ($n_0 = v_0$, $r_{N+1} = 0$)．次元定理より $n_j + r_j = v_j$，定義より $h_j = n_j - r_{j+1}$．よって

$$\sum_{j=0}^{N}(-1)^j h_j = \sum_{j=0}^{N}(-1)^j(n_j - r_{j+1}) = \left(v_0 + \sum_{j=1}^{N}(-1)^j n_j\right) - \sum_{j=0}^{N-1}(-1)^j r_{j+1}$$
$$= v_0 + \sum_{j=1}^{N}(-1)^j(n_j + r_j) = \sum_{j=0}^{N}(-1)^j v_j.$$

(iii)　例 4 の場合頂点は 4 個，辺は 5 本，面は 1 個ゆえ，$v_0 - v_1 + v_2 = 4-5+1 = 0$. また $\partial_j = f_j$，$\operatorname{Ker} \partial_2 = 0$ ($\because$ $\partial_2(PRS) \neq 0$) より $h_2 = 0$．また $\operatorname{Im} \partial_0 = \boldsymbol{K}(P-Q) + \boldsymbol{K}(Q-R) + \boldsymbol{K}(R-S) + \boldsymbol{K}(S-P) + \boldsymbol{K}(P-R) = \boldsymbol{K}(P-Q) \oplus \boldsymbol{K}(Q-R) \oplus \boldsymbol{K}(R-S)$ は 3 次元ゆえ $h_1 = 4-3 = 1$．$\therefore$　$h_0 - h_1 + h_2 = 1-1+0 = 0$，☆☆は両辺とも 0 で成立．

(ii)からこのように，空間の図形(ドーナツのように穴があいていてもよい)を適当に(例 4 のように)三角形の面をつないだ多面体と考えたとき，(面の数)−(辺の数)+(頂点数)が三角形への分割によらず一定であることが従う．

**17-3**　(i)　$\boldsymbol{R}^2 \ni \boldsymbol{v} = {}^t[x_1, x_2]$，$\boldsymbol{w} = {}^t[y_1, y_2]$ とすると $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle = x_2 y_1 + x_1 y_2$．すべての $\boldsymbol{w}$ に対しこれが 0 ならば，$y_1 = 0$，$y_2 = 0$ のときを順に考え $x_2 = 0$，$x_1 = 0$　$\therefore$ $\boldsymbol{v} = 0$．よって非退化．また $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = x_2 x_1 = \dfrac{1}{4}\{(x_1+x_2)^2 - (x_1-x_2)^2\}$ は正にも負にもなるから正定値でない．$\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \rangle = 1$，$\langle \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_j \rangle = 0$ より $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ の双対基底は $(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1)$ である．　(ii)　$\boldsymbol{\alpha}_1 = {}^t[1, -1, 0, \cdots, 0]$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = {}^t[0, 1, -1, 0, \cdots, 0]$ などである．$\boldsymbol{e} := \dfrac{1}{n}(\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{e}_n)$ とおけば，$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 - 3\boldsymbol{e}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_{n-1} = \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{e}_{n-1} - (n-1)\boldsymbol{e}$.

**17-4**　$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i a_{ij}$ とすると $f(\boldsymbol{v}_1) \wedge \cdots \wedge f(\boldsymbol{v}_n) = \left(\sum_{\sigma(1)=1}^{n} \boldsymbol{v}_{\sigma(1)} a_{\sigma(1),1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{\sigma(n)=1}^{n} \boldsymbol{v}_{\sigma(n)} a_{\sigma(n),n}\right) = \sum_{\sigma(1),\cdots,\sigma(n)=1}^{n} \boldsymbol{v}_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_{\sigma(n)} (a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n})$．ここで $(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) \wedge (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = 0$ より $\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w} = -\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{v}$，$\therefore$ $\boldsymbol{v}_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_{\sigma(n)} = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_n$ ($\sigma(1), \cdots, \sigma(n)$ に重複があれば 0.) よって上式は

$$\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_n \cdot \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = (\det A)\, \boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_n$$

に等しい．

## 18章

§18.1　略

§18.2　$A\left(\dfrac{\boldsymbol{u}_{\lambda+\varepsilon}-\boldsymbol{u}_\lambda}{\varepsilon}\right)=\dfrac{1}{\varepsilon}((\lambda+\varepsilon)\boldsymbol{u}_{\lambda+\varepsilon}-\lambda\boldsymbol{u}_\lambda)=\boldsymbol{u}_{\lambda+\varepsilon}+\lambda\dfrac{\boldsymbol{u}_{\lambda+\varepsilon}-\boldsymbol{u}_\lambda}{\varepsilon}$ より，$A\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{u}'$．同様に $A\left(\dfrac{\boldsymbol{u}_{\lambda+\varepsilon}-\boldsymbol{u}_\lambda}{\varepsilon}-\dfrac{\boldsymbol{u}_\lambda-\boldsymbol{u}_{\lambda-\varepsilon}}{\varepsilon}\right)=\dfrac{(\lambda+\varepsilon)\boldsymbol{u}_{\lambda+\varepsilon}-\lambda\boldsymbol{u}_\lambda}{\varepsilon}-\dfrac{\lambda\boldsymbol{u}_\lambda-(\lambda-\varepsilon)\boldsymbol{u}_{\lambda-\varepsilon}}{\varepsilon}=\boldsymbol{u}_{\lambda+\varepsilon}-\boldsymbol{u}_{\lambda-\varepsilon}+\lambda\left(\dfrac{\boldsymbol{u}_{\lambda+\varepsilon}-\boldsymbol{u}_\lambda}{\varepsilon}-\dfrac{\boldsymbol{u}_\lambda-\boldsymbol{u}_{\lambda-\varepsilon}}{\varepsilon}\right)$ より，$2\varepsilon$ で割って極限をとり $A\boldsymbol{u}''=\boldsymbol{u}'+\lambda\boldsymbol{u}''$．$A\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$ とあわせ $A[\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}'']=[\lambda\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}'+\lambda\boldsymbol{u}'']$．この右辺を書き直して結論を得る．

§18.3　まず $A-tE$ の(1, 4)成分の 1 を要としてはき出そう(ア)．

$$\left[\begin{array}{c|c} E & A-tE \\ \hline O & E \end{array}\right]\xrightarrow{\text{ア}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & & & & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\
2 & 1 & & & -2t & -1-t & -2 & 0 \\
0 & & 1 & & 1 & 1 & 2-t & 0 \\
t-2 & & & 1 & 2-t-t^2 & 2-2t & 3-3t & 0 \\ \hline
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & 1 & \\
 & & & & t+3 & 2 & 3 & 1
\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{イ}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & & & & & & & 1 \\
2 & 1 & t+1 & & 1-t & 0 & t-t^2 & \\
0 & 0 & 1 & & 0 & \boxed{1} & 0 & \\
t-2 & 0 & 2t-2 & 1 & t-t^2 & 0 & -2t^2+3t-1 & \\ \hline
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & -1 & 1 & t-2 & \\
 & & & & & & 1 & \\
 & & & & t+1 & 2 & 2t-1 & 1
\end{array}\right]$$

(イは$\boxed{1}$を要としてはき出した．次に$\boxed{1-t}$を要としてはき出す(ウ)．)

$$\xrightarrow{\text{ウ}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & & & & & & & 1 \\
2 & 1 & t+1 & & \boxed{1-t} & & 0 & \\
0 & 0 & 1 & & & 1 & & \\
-t-2 & -t & -t^2+t-2 & 1 & 0 & & (t-1)^3 & \\ \hline
 & & & & 1 & & -t & \\
 & & & & -1 & 1 & 2t-2 & \\
 & & & & & & 1 & \\
 & & & & t+1 & 2 & -t^2+t-1 & 1
\end{array}\right]\xrightarrow{\text{エ}}\left[\begin{array}{c|c} P & D \\ \hline O & Q \end{array}\right].$$

エは $D=\mathrm{diag}[1,1,1-t,(t-1)^3]$ とするため第 2, 3 行の入替と列置換 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$ を行う：$P=\begin{bmatrix}1&&&\\0&0&1&\\2&1&t+1&\\-t-2&-t&-t^2+t-2&1\end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix}&&1&-t\\&1&-1&2t-2\\&&&1\\1&2&t+1&-t^2+t-1\end{bmatrix}$．(さらに $Q$ の第 3 列を $-1$ 倍すれば $D$ は $\mathrm{diag}[1,1,t-1,(t-1)^3]$ となる．)　∴　$A$ の単因子型は $(1,1,t-1,(t-1)^3)$．なお $P=P(t)$，$Q=Q(t)$ は一通りでない．

§18.4 前問より $P(t)^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&\\-2&-t-1&1&\\0&1&0&\\2-t&2-2t&t&1\end{bmatrix}=[\boldsymbol{p}_1'(t),\boldsymbol{p}_2'(t),\boldsymbol{p}_3'(t),\boldsymbol{p}_4'(t)]$ とすれば $\boldsymbol{p}_1'(A)=\boldsymbol{p}_2'(A)=(A-1)\boldsymbol{p}_3'(A)=(A-1)^3\boldsymbol{p}_4'(A)=0$. $\boldsymbol{p}_3'(A)=\boldsymbol{e}_2+A\boldsymbol{e}_4={}^t[1,-1,0,2]$, $\boldsymbol{p}_4'(A)=\boldsymbol{e}_4$. よって $X=[\boldsymbol{p}_3'(A),(A-1)^2\boldsymbol{e}_4,(A-1)\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_4]=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\-1&0&-2&0\\0&-1&0&0\\2&1&1&1\end{bmatrix}$ とすれば $(A-1)X=X\begin{bmatrix}0&&&\\&0&1&\\&&0&1\\&&&0\end{bmatrix}$ である. すなわちこの $X$ により $X^{-1}AX=\begin{bmatrix}1&O\\O&J_3(1)\end{bmatrix}$.

**練習問題 18-1** (i) 順に次の $X$ でジョルダン標準形 $X^{-1}AX=J$ を得る.

$$X_1=\begin{bmatrix}2&2&1\\10&10&3\\3&4&2\end{bmatrix},\quad X_2=\begin{bmatrix}-1&-2&1\\0&1&0\\-1&1&0\end{bmatrix},\quad X_3=\begin{bmatrix}-2&-\frac{1}{2}&1&0\\-5&0&2&-1\\1&1&-1&0\\1&-1&-1&2\end{bmatrix},$$

$$J_1=\begin{bmatrix}1&&\\&2&1\\&&2\end{bmatrix},\quad J_2=\begin{bmatrix}-2&1&\\&-2&1\\&&-2\end{bmatrix},\quad J_3=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\&2&0&0\\&&3&1\\&&&3\end{bmatrix},$$

$$X_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&-3&8\\2&1&-1&3\\0&0&1&-2\end{bmatrix},\quad X_5=\begin{bmatrix}1&0&2&-7\\0&0&1&-2\\0&-2&5&-15\\1&1&0&0\end{bmatrix},$$

$$J_4=\begin{bmatrix}2&1&&\\&2&1&\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix},\quad J_5=\begin{bmatrix}2&&&\\&2&1&\\&&2&1\\&&&2\end{bmatrix}.$$

ただし $X$ は一つには決まらない. これらを求めるにあたり単因子による必要はなく, 例1のように次々とベクトルを得るのも着実な方法である.

(ii) (1)単因子型は $(1,1,(t-2)(t-2)^3)$ で, 最後の単因子 $(t-2)^2$ が最小多項式. (2)以下も同様に $(1,1,(t+2)^3)$, $(1,1,1,(t-2)^2(t-3^2))$, $(1,1,1,(t-2)^4)$, $(1,1,1,(t-1)(t-2)^3)$ が単因子型であり, 最後の単因子が最小多項式.

**18-2** (i) $(A-\lambda)^M\boldsymbol{v}=0$, $(A-\lambda)^N\boldsymbol{w}=0$ ならば, $j\geqq M,N$ に対し $(A-\lambda)^j(k\boldsymbol{v}+l\boldsymbol{w})=0$. (なお条件は $(A-\lambda)^n\boldsymbol{v}=0$」としても同じである.)

(ii) $P^{-1}AP=J$ を $A$ のジョルダン標準形とすると, $(A-\lambda)^N=P(J-\lambda)^NP^{-1}$ ゆえ $(A-\lambda)^N\boldsymbol{v}=0\Longleftrightarrow\boldsymbol{v}=P\boldsymbol{w}$, $(J-\lambda)^N\boldsymbol{w}=0$. つまり $\tilde{V}_A(\lambda)=P(\tilde{V}_J(\lambda))$.

$$J=\begin{bmatrix}\lambda_1E_{m1}+N_1&&&O\\&\lambda_2E_{m2}+N_2&&\\&&\ddots&\\O&&&\lambda_lE_{ml}+N_l\end{bmatrix}\left(N_j\text{ は }\begin{bmatrix}0&*&&O\\&\ddots&\ddots&\\&&0&*\\O&&&0\end{bmatrix},\quad *=0,1\right.$$

の形の $m_j$ 次行列, $E_{m_j}$ は $m_j$ 次単位行列)であり, $N_j^{m_j}=O$ であるから $(J-\lambda_1)^{m_1}=$

$\begin{bmatrix} O & & O \\ & (\lambda_2-\lambda_1)^{m_1}E_{m_2}+* & \\ & & \ddots & \\ O & & (\lambda_l-\lambda_1)^{m_1}E_{m_l}+* \end{bmatrix}$(各$*$は $m_j$ 次上三角で，$j \neq 1$ に対し $(\lambda_j-\lambda_1)^{m_1}E_{m_2}+*$ は可逆)．よって十分大の $N$ に対し $(J-\lambda_1)^N\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_1 \oplus\cdots\oplus \boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_{m_1}(= \tilde{V}_J(\lambda_1))$．$j>1$ でも同様で $\tilde{V}_J(\lambda_j) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_{M_j+1}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_{M_j+m_j}(M_j = m_1+\cdots+m_{j-1})$．明らかに $\boldsymbol{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{l}\tilde{V}_J(\lambda_j)$ であり，可逆行列 $P$ で変換し $\boldsymbol{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{l}\tilde{V}_A(\lambda_j)$ を得る．

(iii) $(J-\lambda_2)^{m_2}$，…，$(J-\lambda_l)^{m_l}$ は順に 2 番目，…，$l$ 番目の対角ブロックが $O$ で $(J-\lambda_2)^{m_2}\cdots(J-\lambda_l)^{m_l} = \begin{bmatrix} \prod_{j\neq1}(\lambda_1-\lambda_j)^{m_j}E_{m_1}+* & & O \\ & O & \\ & & \ddots \\ O & & O \end{bmatrix}$.

$\prod_{j\neq1}(\lambda_1-\lambda_j)^{m_j}E_{m_1}+*$（$*$ は上三角)は可逆で，$\mathrm{Im}\prod_{j\neq1}(J-\lambda_j)^{m_j} = \bigoplus_{i=1}^{m_1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}_i = \tilde{V}_J(\lambda_1)$．
$\therefore\ \mathrm{Im}\prod_{j\neq1}(A-\lambda_j)^{m_j} = \mathrm{Im}\,P\prod_{j\neq1}(J-\lambda_j)^{m_j}P^{-1} = P\,\mathrm{Im}\prod_{j\neq1}(J-\lambda_j)^{m_j} = P(\tilde{V}_J(\lambda_1)) = \tilde{V}_A(\lambda_1)$．他の $\lambda_j$ に対しても同様である．なお $P^{-1}(A-\lambda)P = J-\lambda$ の形より，$\lambda \neq \lambda_j$ なら $A-\lambda$ は可逆で $\tilde{V}(\lambda_j) = \{0\}$.

**18-3** (i) $u(t) = e^{\lambda t}v(t)$ と変換せよ．(ii) 14-2 と同様に考える．部分分数展開すると $\dfrac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{1/2}{(x-1)^2}+\dfrac{-1/4}{x-1}+\dfrac{1/4}{x+1}$ だから，(i)とあわせ $u = \dfrac{1}{2}\int_0^t(t-s)e^{t-s}f(s)\,ds-\dfrac{1}{4}\int_0^t e^{t-s}f(s)\,ds+\dfrac{1}{4}\int_0^t e^{-t+s}f(s)\,ds$ が特解を与える．

**18-4** $A$ を $X^{-1}AX = J$ とジョルダン標準形にするときの $X, X^{-1}$ は数の可逆行列であり，これらを掛けることは数の範囲で基本変形すれば可能．あとは各ジョルダン細胞$J_m(\lambda_k) = \lambda_k E+J$ について ($\lambda-\lambda_k = x$ とおくと)

$$\lambda E-J \xrightarrow{ア} \begin{bmatrix} -1 & & O & x \\ x & \ddots & & 0 \\ & \ddots & -1 & \vdots \\ O & & x & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{イ} \begin{bmatrix} -1 & & O & & x \\ 0 & -1 & & & x^2 \\ 0 & x & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & -1 & \vdots \\ O & & & x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{ウ} \begin{bmatrix} -1 & & O & x \\ 0 & \ddots & & x^2 \\ & \ddots & -1 & \vdots \\ O & & 0 & x^m \end{bmatrix} \xrightarrow{エ} \begin{bmatrix} 1 & & & O \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ O & & & x^m \end{bmatrix}$$

(ア)第 $j$ 列を第 $j+1$ 列に回し，イ〜ウ)行変形で下をはき出し，エ)列変形で第 $n$ 列をはき出し，また第 $m-1$ 列目までを $-1$ 倍した)とできることより結果が従う．

**18-5** (i) $\phi$ が線型写像であること $\phi(kX+k'X') = k\phi(X)+k'\phi(X')\,(X, X' \in M_{m,n}(\boldsymbol{K}), k, k' \in \boldsymbol{K})$ より，解が存在すればその全体はアフィン部分空間 $X+\mathrm{Ker}\,\phi$($X$ は特解)と一致する． (ii) $P^{-1}AP = J = \mathrm{diag}[J_{m_1}(\alpha_1), \cdots, J_{m_a}(\alpha_a)]$，$Q^{-1}BQ = K = \mathrm{diag}[J_{n_1}(\beta_1), \cdots, J_{n_b}(\beta_b)]\,(m_1+\cdots+m_a = m, n_1+\cdots+n_b = n)$ が $A, B$ のジョルダン標準形を与えるとする．$AX-XB = PJP^{-1}X-XQKQ^{-1}$ ゆえ，$Y = P^{-1}XQ$, $D = P^{-1}CQ$ とおけば $AX-XB = C \Longleftrightarrow JY-YK = D$．さらに $Y, D$ を $Y =$

$\begin{bmatrix} Y_{1,1} & \cdots & Y_{1,b} \\ & \cdots & \\ Y_{a,1} & \cdots & Y_{a,b} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} D_{1,1} & \cdots & D_{1,b} \\ & \cdots & \\ D_{a,1} & \cdots & D_{a,b} \end{bmatrix}$ ($Y_{ij}, D_{ij}$ は $m_i$ 行 $n_j$ 列）と区分けすれば，$JY - YK = D \Longleftrightarrow J_{m_i}(\alpha_i)Y_{ij} - Y_{ij}J_{n_j}(\beta_j) = D_{ij}$（すべての $i, j$ について）となり，ジョルダン標準形の場合に帰着される． (iii) $X = [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n]$ とする．$J_m(\alpha) = \alpha + N_m$ より $J_m(\alpha)X - XJ_n(\beta) = C \Longleftrightarrow (\alpha-\beta)X + [N_m\boldsymbol{x}_1, \cdots, N_m\boldsymbol{x}_n] - [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{n-1}] = C = [\boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_n]$．これは $\begin{bmatrix} J_m(\gamma) & O & \cdots & O \\ -E & J_m(\gamma) & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & O \\ O & & -E & J_m(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix}$ $(\gamma = \alpha - \beta)$ と書ける：$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を縦に並べて $mn$ 成分の数ベクトルとした（右辺も同様）．左辺の係数行列（$mn$ 次正方）が $\phi$ の行列表示であり，その行列式は $|J_m(\gamma)|^n = \gamma^{mn}$．よって $\gamma = \alpha - \beta \neq 0$ なら方程式は一意解をもち，実際 $\boldsymbol{x}_1 = J_m(\gamma)^{-1}\boldsymbol{c}_1$，$\boldsymbol{x}_2 = J_m(\gamma)^{-1}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2)$，$\cdots$，$\boldsymbol{x}_n = J_m(\gamma)^{-1}(\boldsymbol{x}_{n-1} + \boldsymbol{c}_n)$．$\alpha = \beta$ のときは，拡大係数行列を

$$\left[\begin{array}{cccc|c} N_m & O & \cdots & O & \boldsymbol{c}_1 \\ -E & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & N_m & O & \boldsymbol{c}_{n-1} \\ O & & -E & N_m & \boldsymbol{c}_n \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} N_m & O & \cdots & O & \boldsymbol{c}_1 \\ -E & N_m & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & O & N_m^2 & \boldsymbol{c}_{n-1} + N_m\boldsymbol{c}_n \\ O & & -E & N_m & \boldsymbol{c}_n \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} O & O & \cdots & N_m^n & \boldsymbol{c}_1 + N_m\boldsymbol{c}_2 + \cdots + N_m^{n-1}\boldsymbol{c}_n \\ -E & O & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & O & N_m^2 & \boldsymbol{c}_{n-1} + N_m\boldsymbol{c}_n \\ O & & -E & N_m & \boldsymbol{c}_n \end{array}\right]$$

と，区分けを保ちつつ行変形する．今 $n \geqq m$ ならば，$N_m^n = O$ なので係数行列の階数は $m(n-1)$．拡大係数行列は $\boldsymbol{c}_1 + N_m\boldsymbol{c}_2 + \cdots + N_m^{n-1}\boldsymbol{c}_n = 0$ なら同じ階数で，このときのみ解

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_{n-2} \\ \boldsymbol{x}_{n-1} \\ \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {N_m}^n\boldsymbol{x}_n \\ N_m^{n-1}\boldsymbol{x}_n \\ \vdots \\ N_m\boldsymbol{x}_n \\ \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_2 + N_m\boldsymbol{c}_3 + \cdots + N_m^{n-2}\boldsymbol{c}_n \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_{n-1} + N_m\boldsymbol{c}_n \\ \boldsymbol{c}_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

（$\boldsymbol{x}_n$ の成分だけ $m$ 個のパラメータをもつ）

をもつ．$n < m$ のときも方程式を転置すれば同様．

## 19章

§19.4 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\hbar > 0$ を $\int_{|x|<\varepsilon} \delta_\hbar(x)\,dx < \varepsilon$ のようにとることができる（容易）．積分の平均値の定理を用いると，ある $\theta$ により $\int_{|x|\leqq\varepsilon} f(x)\delta_\hbar(x)\,dx = f(\theta)\int_{|x|\leqq\varepsilon}\delta_\hbar(x)\,dx$ $(|\theta| < \varepsilon)$ となり，この積分は $\varepsilon \to 0$ のとき $f(0)$ に収束する．

残りの積分も，$|f(x)| < M$ とすれば

$$\left|\int_{|x|>\varepsilon} f(x)\delta_\hbar(x)\,dx\right| < \sup_{|x|>\varepsilon}|f(x)| \cdot \int_{|x|>\varepsilon}\delta_\hbar(x)\,dx < M\varepsilon \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0).$$

この結果は，$\{\varphi_n\}$ の完全性「$(f, \varphi_n) = 0\ (n = 0, 1, \cdots) \Rightarrow f = 0$」を理解するのに役に立つ．$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) \times$（多項式）であった．示した式を $\int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0)\delta_\varepsilon(x)\,dx \to f(x_0)$ と書き，$e^{-(x-x_0)^2/\varepsilon} = g(x)e^{-x^2/(2\hbar)}$ とみる：$g(x) = e^{-(x-x_0)^2/\varepsilon + x^2/(2\hbar)}$ であり，

これをテーラー展開し多項式の(広義一様に絶対収束する)和と考えれば，$\delta_\varepsilon(x-x_0)=\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-(x-x_0)^2/\varepsilon}$ を $\varphi_n$ の和で表せることになる：これを $\delta_\hbar(x-x_0)=\sum c_n\varphi_n(x)$ としよう．すると仮定 $(\varphi_n,f)=0$ の下では，$(\delta_\hbar(\cdot-x_0),f)=\sum c_n(\varphi_n,f)=0$．0 の極限は 0 だから，これは任意の点 $x_0$ で $f(x_0)=0$ であることを意味する．もっとも途中で無限和と積分の順序交換をしており，より厳密に考える必要はある．

**§19.5**　(i)　$f$ は遠方で 0 になるなめらかな関数とする．定義より

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)x\delta'(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}-(f(x)x)'\delta(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}-(f'(x)x+f(x))\delta(x)\,dx=-(f,\delta)-\int_{-\infty}^{\infty}-f'(x)x\delta(x)\,dx.$$

この第 2 項は，($x=0$ での値だから) $f'(0)\cdot 0$ として 0 になる．

(ii)　ア)　$\lambda\notin\boldsymbol{R}$ に対し $\psi_\lambda^\pm(x)=e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}$，$c_\lambda(x)=\dfrac{e^{i\sqrt{\lambda}x}+e^{-i\sqrt{\lambda}x}}{2}$，$s_\lambda(x)=\dfrac{e^{i\sqrt{\lambda}x}-e^{-i\sqrt{\lambda}x}}{2i\sqrt{\lambda}}$，$m^+=i\sqrt{\lambda}$，$m^-=-i\sqrt{\lambda}$ である．

イ)　$N_\lambda=\dfrac{1}{2i\sqrt{\lambda}}\begin{bmatrix}1 & -i\sqrt{\lambda}\\ i\sqrt{\lambda} & \lambda\end{bmatrix}$ であり，$\lambda=k^2>0$ ($k>0$, $\sqrt{\lambda}=k+i0$) のとき $\mathrm{Im}\,N_\lambda=\dfrac{1}{2k}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & k^2\end{bmatrix}$．また $\lambda<0$ のとき $\mathrm{Im}\,N_\lambda=O$．これより定理の式は

$$\delta(x-y)=\frac{1}{\pi}\int_{k=0}^{\infty}[c_\lambda,s_\lambda](x)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & k^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_\lambda\\ s_\lambda\end{bmatrix}(y)2k\,dk=\int_{k=0}^{\infty}\frac{e^{ik(x-y)}+e^{-ik(x-y)}}{2}dk$$

となる．

# 索　引

## [欧字・記号]



## [あ行]



## [か行]

## [さ行]



## [た行]

## [な行]



## [は行]

## [ま行]



## [や行]



## [ら行]



## [わ行]

●——プロフィール

長谷川浩司(はせがわ・こうじ)

1963年，静岡県榛原郡生まれ．

1987年，名古屋大学大学院理学研究科数学専攻修了．

博士(理学)．

現在，東北大学大学院理学研究科講師．

(URL) http://www.math.tohoku.ac.jp/~kojihas

せんけいだいすう——りにあ・あるじぇぶら
線型代数——Linear Algebra

2004年 4月25日　第1版第1刷発行
2006年11月10日　第1版第4刷発行

著　者——長谷川浩司

発行者——林　克行

発行所——株式会社 日本評論社

〒170-8474　東京都豊島区南大塚 3-12-4

電話　03-3987-8621(販売)　03-3987-8599(編集)

印刷所——株式会社 精興社

製本所——難波製本

装　丁——林　健造

本文イラスト——大石容子



ISBN 4-535-78371-3